SULLE FORME TERNARIE

DI

GRADO QUALUNQUE

MEMORIA PRIMA

DI

GIUSEPPE BATTAGLINI

NAPOLI
STAMPERIA DEL FIBRENO
Pignatelli a san Giovanni maggiore
1868

Oggetto della presente memoria è la rappresentazione geometrica di alcuni tra gl'invarianti, i covarianti ed i contravarianti delle forme ternarie di grado qualunque.

1. Preliminari. Siano x, y, z ed X, Y, Z due sistemi di variabili; attribuendo ai rapporti $x:y:z$ ed $X:Y:Z$ tutt'i valori possibili, il loro insieme costituirà un *sistema ternario* (S, s). *Rappresentazione* del sistema ternario è il concetto del *continuo* nel quale si pongono le *determinazioni* $x:y:z$, ed $X:Y:Z$; ad ogni gruppo di queste determinazioni corrisponde nel continuo un *elemento*, che indicheremo generalmente con ω ed Ω; x, y, z sono le *coordinate* di ω, ed X, Y, Z quelle di Ω.

Ponendo tra x, y, z ed X, Y, Z la relazione lineare

$$(1) \qquad Xx+Yy+Zz=0\ ,$$

per un sistema di valori attribuiti ad $x:y:z$, o sia per un elemento ω, tutti gli elementi Ω che con le loro coordinate verificano l'equazione (1) si diranno *appartenere* ad ω; e similmente per un sistema di valori attribuiti ad $X:Y:Z$, o sia per un elemento Ω, tutti gli elementi ω che con le loro coordinate verificano l'equazione (1) si diranno *appartenere* ad Ω. Adunque ogni equazione di 1° grado omogenea tra le variabili (X, Y, Z), o pure tra le variabili (x, y, z), determina un elemento ω o

pure Ω, ed i rapporti tra le sue coordinate sono quelli tra i coefficienti delle veriabili nella proposta equazione. Due elementi Ω_i ed Ω_j appartenenti ad ω determinano questo elemento, e tra le sue coordinate si avranno le relazioni

$$\frac{x}{Y_iZ_j-Z_iY_j}=\frac{y}{Z_iX_j-X_iZ_j}=\frac{z}{X_iY_j-Y_iX_j};$$

similmente due elementi ω_i ed ω_j appartenenti ad Ω determinano questo elemento, e tra le sue coordinate si avranno le relazioni

$$\frac{X}{y_iz_j-z_iy_j}=\frac{Y}{z_ix_j-x_iz_j}=\frac{Z}{x_iy_j-y_ix_j}.$$

Elementi *fondamentali* del sistema (S, s) sono i tre elementi ω, ed i tre elementi Ω, determinati rispettivamente dalle equazioni

$$X=0\,,\quad Y=0\,,\quad Z=0\,;\qquad x=0\,,\quad y=0\,,\quad z=0\,,$$

per le coordinate dei quali si hanno quindi le relazioni

$$y=z=0\,,\ z=x=0\,,\ x=y=0\,;\quad Y=Z=0\,,\ Z=X=0\,,\ X=Y=0\,.$$

Due degli elementi fondamentali ω o Ω appartengono ad un elemento fondementale Ω o ω.

La più semplice rappresentazione geometrica del sistema ternario è data dalle forme geometriche fondamentali di 2ª specie, cioè dal sistema dei piani e delle rette che passano per un punto, e dal sistema dei punti e delle rette che giacciono in un piano. Indicando con $(\omega_1\omega_2\omega_3, \Omega_1\Omega_2\Omega_3)$ una terna fondamentale nel sistema di rette e di piani concorrenti in un punto, si prenderenno per le coordinate x, y, z di una retta ω, o pure per le coordinate X, Y, Z di un piano Ω del sistema, le espressioni

$$x=\frac{\operatorname{sen}\omega\Omega_1}{\operatorname{sen}\omega_1\Omega_1}\,,\quad y=\frac{\operatorname{sen}\omega\Omega_2}{\operatorname{sen}\omega_2\Omega_2}\,,\quad z=\frac{\operatorname{sen}\omega\Omega_3}{\operatorname{sen}\omega_3\Omega_3}\,,$$

o pure

$$X=\frac{\operatorname{sen}\Omega\omega_1}{\operatorname{sen}\Omega_1\omega_1}\,,\quad Y=\frac{\operatorname{sen}\Omega\omega_2}{\operatorname{sen}\Omega_2\omega_2}\,,\quad Z=\frac{\operatorname{sen}\Omega\omega_3}{\operatorname{sen}\Omega_3\omega_3}\,,$$

in cui $\omega\Omega$ dinota generalmente l'angolo compreso tra la retta ω ed il

piano Ω; saranno allora le coordinate di Ω o pure di ω espresse da

$$\frac{X}{\operatorname{sen}\Omega\omega_1}=\frac{Y}{\operatorname{sen}\Omega\omega_2}=\frac{Z}{\operatorname{sen}\Omega\omega_3}, \quad \text{o pure} \quad \frac{x}{\operatorname{sen}\omega\Omega_1}=\frac{y}{\operatorname{sen}\omega\Omega_2}=\frac{z}{\operatorname{sen}\omega\Omega_3}.$$

Similmente indicando con $(\Omega_1\Omega_2\Omega_3, \omega_1\omega_2\omega_3)$ una terna fondamentale nel sistema di rette e di punti giacenti in un piano, si prenderanno per le coordinate X, Y, Z di una retta Ω, o pure per le coordinate x, y, z di un punto ω del sistema, le espressioni

$$X=\frac{\Omega\omega_1}{\Omega_1\omega_1}, \; Y=\frac{\Omega\omega_2}{\Omega_2\omega_2}, \; Z=\frac{\Omega\omega_3}{\Omega_3\omega_3}, \quad \text{o pure} \quad x=\frac{\omega\Omega_1}{\omega_1\Omega_1}, \; y=\frac{\omega\Omega_2}{\omega_2\Omega_2}, \; z=\frac{\omega\Omega_3}{\omega_3\Omega_3},$$

in cui $\Omega\omega$ dinota generalmente la distanza tra la retta Ω ed il punto ω; saranno allora le coordinate di ω o pure di Ω espresse da

$$\frac{x}{\omega\Omega_1}=\frac{y}{\omega\Omega_2}=\frac{z}{\omega\Omega_3}, \quad \text{o pure} \quad \frac{X}{\Omega\omega_1}=\frac{Y}{\Omega\omega_2}=\frac{Z}{\Omega\omega_3}.$$

Forma ternaria pura di grado ν è un polinomio omogeneo e di grado ν rispetto alle variabili x, y, z o X, Y, Z. Prenderemo per una tale forma le espressioni

$$U=\Sigma\frac{1.2.3\ldots\nu}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}K(\alpha,\beta,\gamma)x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

$$u=\Sigma\frac{1.2.3\ldots\nu}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}k(\alpha,\beta,\gamma)X^\alpha Y^\beta Z^\gamma,$$

estendendo il simbolo Σ a tutte le partizioni (α,β,γ) di ν, ed indicando con K o k, affetto dal simbolo stesso (α,β,γ) della partizione, il coefficiente del termine corrispondente di U o di u.

Adopreremo ordinariamente per indicare le forme ternarie U ed u le notazioni

$$U=(Ax+By+Cz)_\nu^\nu=(A, B, C)_\nu(x, y, z)^\nu,$$

$$u=(aX+bY+cZ)_\nu^\nu=(a, b, c)_\nu(X, Y, Z)^\nu,$$

intendendo che dopo lo sviluppo della potenza ν^{ma} del trinomio $Ax+By+Cz$, o pure del trinomio $aX+bY+cZ$, gli esponenti di A, B, C o di a, b, c si mutino in indici, e si riguardino $A_\alpha, B_\beta, C_\gamma$, o pure $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma$ come *om-*

bre che abbiano un significato di quantità solamente nelle combinazioni $A_\alpha B_\beta C_\gamma$, $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di ν, essendo allora $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ o pure $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ eguali ai coefficienti $K(\alpha, \beta, \gamma)$ di U, o pure $k(\alpha, \beta, \gamma)$ di u, che corrispondono alle medesimo partizioni.

L'equazione $U=0$, o $u=0$, con i diversi valori dei rapporti $x:y:z$, o pure $X:Y:Z$, che la verificano determina una *serie* d'infiniti elementi ω o Ω del sistema ternario; il *sistema* S, *o* s, *di grado* ν degli elementi ω o Ω sarà la *rappresentazione* della forma U o u. Si diranno ancora gli elementi ω ed Ω di S, ed s, gli *elementi* di U e di u.

Se le forme U ed u si decompongono in fattori, ciascuno di essi determinerà un sistema di elementi ω o Ω, che fa *parte* di S, o s,; in tal caso S_ν ed s_ν si diranno sistemi *composti* di grado ν, in opposiziono al caso generale in cui quei sistemi si diranno *semplici*.

Se i fattori in cui si decompongono U ed u sono tutti di primo grado, la rappresentazione di quelle forme sarà costituita da ν sistemi di elementi ω o Ω appartenenti ad un *gruppo* di ν elementi Ω o ω; indicando questi gruppi con $(\Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_i \ldots \Omega_\nu)$ ed $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_i \ldots \omega_\nu)$ potrà supporsi

$$U=(X_1x+Y_1y+Z_1z)(X_2x+Y_2y+Z_2z)\ldots(X_ix+Y_iy+Z_iz)\ldots(X_\nu x+Y_\nu y+Z_\nu z) ,$$

$$u=(x_1X+y_1Y+z_1Z)(x_2X+y_2Y+z_2Z)\ldots(x_iX+y_iY+z_iZ)\ldots(x_\nu X+y_\nu Y+z_\nu Z) ,$$

e sarà allora

$$(2)\qquad \begin{aligned} A_\alpha B_\beta C_\gamma &= \frac{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha X_i . \Pi^\beta Y_i . \Pi^\gamma Z_i\right), \\ a_\alpha b_\beta c_\gamma &= \frac{1.2\ldots\alpha \times 1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha x_i . \Pi^\beta y_i . \Pi^\gamma z_i\right), \end{aligned}$$

estendendo le somme Σ a tutt'i prodotti dello combinazioni $\Pi^\alpha, \Pi^\beta, \Pi^\gamma$, corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di ν, di α tra le X_i o x_i, di β tra le Y_i o y_i, e di γ tra le Z_i o z_i, supponendo però che le combinazioni delle X_i, Y_i, Z_i, o pure delle x_i, y_i, z_i, che si moltiplicano tra loro siano *complementari*, cioè tali che gl'indici delle X, Y, Z, o pure delle x, y, z, siano diversi tra loro.

Se un polinomio è omogeneo e dei gradi $\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu$ rispetto ai diversi sistemi di variabili $(x_1, y_1, z_1)\ldots(x_i, y_i, z_i)\ldots(x_\mu, y_\mu, z_\mu)$, o pure $(X_1, Y_1, Z_1)\ldots(X_i, Y_i, Z_i)\ldots(X_\mu, Y_\mu, Z_\mu)$, si dirà quel polinomio *forma ternaria mista* rispetto alle variabili (x, y, z) o (X, Y, Z) dei gradi

$(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu)$. Per esprimere una tale forma adopreremo le notazioni *ombrali*

$$U(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu) = \Pi_1^\mu [(Ax+By+Cz)_\nu^\nu]_i = \Pi_1^\mu [(A,B,C)_\nu (x,y,z)^\nu]_i ,$$

$$u(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu) = \Pi_1^\mu [(aX+bY+cZ)_\nu^\nu]_i = \Pi_1^\mu [(a,b,c)_\nu (X,Y,Z)^\nu]_i .$$

Una forma ternaria può essere ancora *mista* tanto rispetto alle variabili del sistema (x, y, z), quanto rispetto alle variabili del sistema (X, Y, Z); se la forma è rispetto ai diversi gruppi di variabili del primo sistema dei gradi $n_1 \ldots n_j \ldots n_m$, e rispetto ai diversi gruppi di variabili del secondo sistema dei gradi $N_1 \ldots N_i \ldots N_M$, adopreremo per rappresentarla la notazione

$$(U,u)(n_1 \ldots n_i \ldots n_m ; N_1 \ldots N_i \ldots N_M) = \Pi_1^m [(Ax+By+Cz)_n^n]_i \cdot \Pi_1^M [(aX+bY+cZ)_N^N]_i =$$

$$= \Pi_1^m [(A,B,C)_n (x,y,z)^n]_i \cdot \Pi_1^M [(a,b,c)_N (X,Y,Z)^N]_i .$$

La rappresentazione della forma mista $U(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu)$ o $u(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu)$ dà luogo ad una *dipendenza* $S(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu)$ o $s(\nu_1 \ldots \nu_i \ldots \nu_\mu)$ tra μ elementi $\omega_1 \ldots \omega_i \ldots \omega_\mu$ o $\Omega_1 \ldots \Omega_i \ldots \Omega_\mu$ tale che presi ad arbitrio tutti questi elementi, ad eccezione di uno solo tra essi per volta, per esempio ω_i o Ω_i, questo elemento ω_i o Ω_i apparterrà ad un sistema S_{ν_i} o s_{ν_i} di elementi ω o Ω del grado ν_i. In modo analogo si ha la rappresentazione della forma mista $(U, u)(n_1 \ldots n_i \ldots n_m ; N_1 \ldots N_i \ldots N_M)$.

Indicando con

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13} \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23} \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad \lambda = \begin{vmatrix} \Lambda_{11}, & \Lambda_{12}, & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21}, & \Lambda_{22}, & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31}, & \Lambda_{32}, & \Lambda_{33} \end{vmatrix}$$

due determinanti ad elementi reciproci, se in due sistemi ternarii (S, s) o (S', s') le variabili x, y, z ed x', y', z' sono legate tra loro dalle relazioni

$$(3) \quad x = \lambda_{11} x' + \lambda_{12} y' + \lambda_{13} z', \quad y = \lambda_{21} x' + \lambda_{22} y' + \lambda_{23} z', \quad z = \lambda_{31} x' + \lambda_{32} y' + \lambda_{33} z',$$

le variabili X, Y, Z ed X', Y', Z' (supponendo sempre che esse dipendano da x, y, z ed x', y', z' per mezzo delle condizioni $Xx + Yy + Zz = 0$,

$X'x'+Y'y'+Z'z'=0$), saranno legate invece dalle relazioni

$$(4)\quad X=\Lambda_{11}X'+\Lambda_{12}Y'+\Lambda_{13}Z',\ Y=\Lambda_{21}X'+\Lambda_{22}Y'+\Lambda_{23}Z',\ Z=\Lambda_{31}X'+\Lambda_{32}Y'+\Lambda_{33}Z';$$

si dirà in tal caso che il sistema (S',s') è la *trasformazione lineare* dol sistema (S,s); la quantità Λ o λ (la seconda delle quali è il quadrato della prima) è il *determinante* o *modulo* della trasformazione rispetto ad (x,y,z) o ad (X,Y,Z).

Le coordinate (x,y,z) dei diversi elementi ω di S, le quali sono assoggettate tutte alla stessa trasformazione (3), si dicano variabili *cogredienti*, e le coordinate (X,Y,Z) dei diversi elementi Ω di s, le quali sono assoggettate tutte alla stessa trasformazione (4), si dicono invece variabili *contragredienti*.

Se (A,B,C) o (a,b,c) sono ombre che entrano nella composizione della forma U o u, indicando con (A',B',C') o (a',b',c') le ombre corrispondenti della trasformata U' o u', si troverà

$$\Lambda A=\Lambda_{11}A'+\Lambda_{12}B'+\Lambda_{13}C',\ \Lambda B=\Lambda_{21}A'+\Lambda_{22}B'+\Lambda_{23}C',\ \Lambda C=\Lambda_{31}A'+\Lambda_{32}B'+\Lambda_{33}C',$$

o

$$\lambda a=\lambda_{11}a'+\lambda_{12}b'+\lambda_{13}c',\ \lambda b=\lambda_{21}a'+\lambda_{22}b'+\lambda_{23}c',\ \lambda c=\lambda_{31}a'+\lambda_{32}b'+\lambda_{33}c',$$

sicchè saranno (A,B,C) variabili contragredienti, ed (a,b,c) variabili cogrodienti.

Consideriamo un numero qualunque di forme ternarie $[(U,u)_1, (U,u)_2 \ldots (U,u)_i \ldots (U,u)_\mu]$ di variabili cogredienti e contragredienti, e siano $[(U',u')_1, (U',u')_2 \ldots (U',u')_i \ldots (U',u')_\mu]$ le loro trasformate lineari per mezzo delle formole (3) e (4); chiamiamo *simili* due funzioni (Φ,φ) e (Φ',φ') allorchè (Φ,φ) è formata con le variabili (x,y,z) ed (X,Y,Z) contenute nelle formo (U,u), e con i coefficienti di queste forme, nello stesso modo che (Φ',φ') è formata con le variabili corrispondenti (x',y',z') od (X',Y',Z') contenute nelle formo (U',u'), e con i coefficienti delle medesime forme. Se le funzioni simili (Φ,φ) e (Φ',φ') sono tali che (Φ',φ') si distingue dalla trasformata lineare di (Φ,φ) solamente per un fattore, potenza del modulo Λ o λ della trasformazione, si dirà (Φ,φ) un *concomitante* del gruppo di forme $[(U,u)_1, (U,u)_2 \ldots (U,u)_i \ldots (U,u)_\mu]$, o semplicemente del sistema (S,s). Un concomitante prende particolarmente il nome di *covariante*, *contravariante*, o *invariante*, secondo che è formato con le

variabili cogredienti, con le variabili contragredienti, o con i soli coefficienti delle forme proposte.

Siano $[(\Phi,\varphi)_1, (\Phi,\varphi)_2 \ldots (\Phi,\varphi)_i \ldots (\Phi,\varphi)_\rho]$, $[(\Phi',\varphi')_1, (\Phi',\varphi')_2 \ldots (\Phi',\varphi')_i, \ldots (\Phi',\varphi')_\rho]$ due gruppi di funzioni simili, relative ai gruppi di forme $[(U,u)_1, (U,u)_2 \ldots (U,u)_i \ldots (U,u)_\mu]$, $[(U',u')_1, (U',u')_2 \ldots (U',u')_i \ldots (U',u')_\mu]$; se quei gruppi di funzioni sono tali che le funzioni $[(\Phi',\varphi')_1, (\Phi',\varphi')_2 \ldots (\Phi',\varphi')_i \ldots (\Phi',\varphi')_\rho]$ si possano esprimere linearmente per mozzo delle trasformate lineari delle funzioni $[(\Phi,\varphi)_1, (\Phi,\varphi)_2 \ldots (\Phi,\varphi)_i \ldots (\Phi,\varphi)_\rho]$, i coefficienti in queste relazioni lineari essendo formati con i soli coefficienti Λ_{ij}, λ_{ij} della trasformazione, si dirà $[(\Phi,\varphi)_1, (\Phi,\varphi)_2 \ldots (\Phi,\varphi)_i \ldots (\Phi,\varphi)_\rho]$ un *plesso concomitante* del gruppo di forme $[(U,u)_1, (U,u)_2 \ldots (U,u)_i \ldots (U,u)_\mu]$, o semplicemente del sistema (S,s). Un plesso concomitante prende il nome di *plesso covariante*, *plesso contravariante*, o *plesso invariante* nelle stesse circostanze come per un semplice concomitante.

Se un concomitante di un gruppo di forme conserva il carattere invariantivo non solo per le trasformazioni lineari operate sulle variabili cogredienti o contragredienti contenute in esso, ma anche allorchè si sostituiscono alle forme proposte altre forme espresse linearmente per mezzo delle prime, il concomitante prende il nome di *combinante*.

Essendo $(\omega, \omega_i, \omega_j)$ ed $(\Omega, \Omega_i, \Omega_j)$ terne di elementi ω ed Ω del sistema (S,s), l'espressioni

$$P.(\omega\omega_i\omega_j) = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_i, & y_i, & z_i \\ x_j, & y_j, & z_j \end{vmatrix}, \quad \text{e} \quad p.(\Omega\Omega_i\Omega_j) = \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ X_i, & Y_i, & Z_i \\ X_j, & Y_j, & Z_j \end{vmatrix}$$

si diranno le *potenze* di quelle terne, e l'espressione

$$P.(\omega\Omega) = xX + yY + zZ = p.(\Omega\omega),$$

si dirà la *potenza* della coppia (ω, Ω).

Considerando le potenze di due terne corrispondenti di elementi ω o Ω dei sistemi (S,s) ed (S',s'), o pure le potenze di due coppie corrispondenti di elementi (ω, Ω) dei medesimi sistemi, si avrà evidentemente

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Lambda P.(\omega'\omega'_i\omega'_j) &= P.(\omega\omega_i\omega_j), & \lambda p.(\Omega'\Omega'_i\Omega'_j) &= p.(\Omega\Omega_i\Omega_j) \\ \Lambda P.(\omega'\Omega') &= P.(\omega\Omega), & \lambda p.(\Omega'\omega') &= p.(\Omega\omega), \text{ *)} \end{aligned}$$

*) Si ha la prima o la seconda di queste due ultime formole, secondo che si riguardino Λ_{ij} come elementi reciproci di λ_{ij}, o λ_{ij} come elementi reciproci di Λ_{ij}.

sicchè l'espressioni $P.(\omega\omega_i\omega_j)$, $p.(\Omega\Omega_i\Omega_j)$, $P.(\omega\Omega)$, $p.(\Omega\omega)$ sono concomitanti del sistema. In generale ogni espressione (Φ,φ) omogenea rispetto alle potenze relative a diverse terne di elementi $(\omega,\omega_i,\omega_j)$, $(\Omega,\Omega_i,\Omega_j)$, e a diverse coppie di elementi (ω,Ω) del sistema, sarà un concomitante.

Ciò che si è detto per le potenze formate con le variabili (x,y,z) o (X,Y,Z) vale ancora per quelle formate con le ombre (a,b,c) o (A,B,C).

Consideriamo i due gruppi corrispondenti di elementi

$$G_\nu\ldots(\omega_1,\omega_2\ldots\omega_i\ldots\omega_\nu)\,,\qquad G'_\nu\ldots(\omega'_1,\omega'_2\ldots\omega'_i\ldots\omega'_\nu)\,,$$

o pure

$$g_\nu\ldots(\Omega_1,\Omega_2\ldots\Omega_i\ldots\Omega_\nu)\,,\qquad g'_\nu\ldots(\Omega'_1,\Omega'_2\ldots\Omega'_i\ldots\Omega'_\nu)\,,$$

dei sistemi (S,s) ed (S',s'), e le espressioni corrispondenti

$$K(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha x_i\,.\,\Pi^\beta y_i\,.\,\Pi^\gamma z_i\right),$$

$$K'(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha x'_i\,.\,\Pi^\beta y'_i\,.\,\Pi^\gamma z'_i\right),$$

o pure

$$k(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha X_i\,.\,\Pi^\beta Y_i\,.\,\Pi^\gamma Z_i\right),$$

$$k'(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma}{1.2.3\ldots\nu}\Sigma\left(\Pi^\alpha X'_i\,.\,\Pi^\beta Y'_i\,.\,\Pi^\gamma Z'_i\right),$$

formate come si è detto precedentemente con le loro coordinate; è facile vedere che ciascuna delle quantità $K'(\alpha,\beta,\gamma)$ o $k'(\alpha,\beta,\gamma)$, per tutte le $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ partizioni (α,β,γ) di ν, si esprimerà linearmente per mezzo delle $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ quantità $K(\alpha,\beta,\gamma)$, o $k(\alpha,\beta,\gamma)$, i coefficienti in queste relazioni lineari essendo formati con i coefficienti λ_{ij}, o Λ_{ij} della trasformazione; le $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ espressioni $K(\alpha,\beta,\gamma)$, o $k(\alpha,\beta,\gamma)$ formano quindi un plesso concomitante. In particolare le $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ quantità $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, o $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ corrispondenti alle partizioni (α,β,γ) di ν formeranno anche un plesso concomitante.

Siano le forme ternarie

$$U=(Ax+By+Cz)^\nu_\nu\,,\qquad u=(aX+bY+cZ)^\nu_\nu\,,$$

e le loro trasformate lineari

$$U'=(A'x'+B'y'+C'z')^{\nu}, \qquad u'=(a'X'+b'Y'+c'Z')^{\nu};$$

sarà

$$A'=\lambda_{11}A+\lambda_{21}B+\lambda_{31}C, \quad B'=\lambda_{12}A+\lambda_{22}B+\lambda_{32}C, \quad C'=\lambda_{13}A+\lambda_{23}B+\lambda_{33}C,$$
$$a'=\Lambda_{11}a+\Lambda_{21}b+\Lambda_{31}c, \quad b'=\Lambda_{12}a+\Lambda_{22}b+\Lambda_{32}c, \quad c'=\Lambda_{13}a+\Lambda_{23}b+\Lambda_{33}c,$$

e quindi, ponendo in generale $1.2.3\ldots i=(\mathrm{i})$,

$$A'_\alpha B'_\beta C'_\gamma=\Sigma\Bigg[\frac{(\alpha)}{(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)}\lambda_{11}^{\alpha_1}\lambda_{21}^{\alpha_2}\lambda_{31}^{\alpha_3}A_{\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\gamma_1} \text{ molt. per}$$
$$\frac{(\beta)}{(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3)}\lambda_{12}^{\beta_1}\lambda_{22}^{\beta_2}\lambda_{32}^{\beta_3}B_{\alpha_2\cdot\beta_2\cdot\gamma_2}\cdot\frac{(\gamma)}{(\gamma_1)(\gamma_2)(\gamma_3)}\lambda_{13}^{\gamma_1}\lambda_{23}^{\gamma_2}\lambda_{33}^{\gamma_3}C_{\alpha_3\cdot\beta_3\cdot\gamma_3}\Bigg],$$

$$a'_\alpha b'_\beta c'_\gamma=\Sigma\Bigg[\frac{(\alpha)}{(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)}\Lambda_{11}^{\alpha_1}\Lambda_{21}^{\alpha_2}\Lambda_{31}^{\alpha_3}a_{\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\gamma_1} \text{ molt. per}$$
$$\frac{(\beta)}{(\beta_1)(\beta_2)(\beta_3)}\Lambda_{12}^{\beta_1}\Lambda_{22}^{\beta_2}\Lambda_{32}^{\beta_3}b_{\alpha_2\cdot\beta_2\cdot\gamma_2}\cdot\frac{(\gamma)}{(\gamma_1)(\gamma_2)(\gamma_3)}\Lambda_{13}^{\gamma_1}\Lambda_{23}^{\gamma_2}\Lambda_{33}^{\gamma_3}c_{\alpha_3\cdot\beta_3\cdot\gamma_3}\Bigg],$$

il simbolo Σ estendendosi a tutte lo partizioni (α,β,γ) di ν, $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ di α, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ di β, e $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ di γ. Segue da ciò che il gruppo delle $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}$ quantità $A_\alpha B_\beta C_\gamma$, o pure $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ (cioè il gruppo dei coefficienti della forma U o u) costituisce un plesso concomitante. Se le forme U ed u si decompongono in ν fattori lineari $X_i x+Y_i y+Z_i z$, ed $x_i X+y_i Y+z_i Z$, i plessi delle quantità $A_\alpha B_\beta C_\gamma$, ed $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ si ridurranno a quelli delle quantità $k(\alpha,\beta,\gamma)$ e $K(\alpha,\beta,\gamma)$ poc' anzi considerate.

Tutto ciò che diremo sullo forme espresse in variabili cogredienti potrà applicarsi alle forme espresse in variabili contragredienti; in generale, pel principio di *dualità*, le relazioni tra gli elementi ω del sistema ternario hanno le loro analoghe tra gli elementi Ω del medesimo sistema.

2. **Elementi multipli di una forma; discriminante; forme congiunte; risultanti.** Sia U una forma ternaria pura di grado n: essendo (ω_i,ω_j) una coppia qualunque appartenente ad un elemento Ω, si pongano in $U=0$ per x, y e z le espressioni

$$x=\xi x_i+\tau x_j, \qquad y=\xi y_i+\tau y_j, \qquad z=\xi z_i+\tau z_j;$$

facendo per brevità

$$x_i D_x + y_i D_y + z_i D_z = \Theta_i \,, \qquad x_j D_x + y_j D_y + z_j D_z = \Theta_j \,,$$

(in cui D_x, D_y, D_z dinotano i segni di derivazione rispetto alle variabili x, y e z) si avrà l'equazione

$$(1) \qquad \begin{aligned} (U, \Omega) = \xi^n U_i + \tfrac{1}{1} \xi^{n-1} \eta \Theta_j U_i + \tfrac{1}{1.2} \xi^{n-2} \eta^2 \Theta_j^2 U_i + \ldots \\ \ldots + \tfrac{1}{1.2} \eta^{n-2} \xi^2 \Theta_i^2 U_j + \tfrac{1}{1} \eta^{n-1} \xi \Theta_i U_j + \eta^n U_j = 0 \,, \end{aligned}$$

gl'indici i ed j di U dinotando che dopo le derivazioni si pongono le coordinate di ω_i o di ω_j invece di quelle di ω.

Le radici $\xi : \eta$ dell' equazione (1) determinano rispetto alla coppia (ω_i, ω_j), quale coppia fondamentale, n elementi ω, che sono gli elementi comuni ad U ed Ω. Supponiamo che, indipendentemente da ω_j, si annulli l' m^{mo} termine dell' equazione (1), vale a dire che per tutte le $\frac{m(m+1)}{2}$ partizioni (α, β, γ) di $m-1$ si abbia $D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U = 0$; osservando che pel teorema fondamentale sulle funzioni omogenee, posto

$$\alpha + \beta + \gamma = \mu - 1 \,,$$

si ha

$$x D_x^{\alpha+1} D_y^\beta D_z^\gamma U + y D_x^\alpha D_y^{\beta+1} D_z^\gamma U + z D_x^\alpha D_y^\beta D_z^{\gamma+1} U = (n - \mu + 1) D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U \,,$$

se le derivate di U si annullano per tutte le partizioni di μ, si annulleranno ancora per tutte le partizioni di $\mu - 1$; segue da ciò che nella supposizione fatta saranno verificate, indipendentemente da ω_j, tutte le relazioni

$$(2) \qquad U_i = 0 \,, \quad \Theta_j U_i = 0 \,, \quad \Theta_j^2 U_i = 0 \ldots\ldots \Theta_j^{m-1} U_i = 0 \,;$$

in tal caso ogni elemento Ω appartenente ad ω_i ha generalmente con U m elementi comuni coincidenti in ω_i; si dice allora ω_i *elemento multiplo di* U, *d'ordine* m.

Poste le relazioni (2), l'equazione $\Theta^m U_i = 0$ determina un gruppo g_m di m elementi Ω appartenenti ad ω_i; ognuno degli elementi di tal gruppo ha di comune con U, oltre degli m elementi coincidenti in ω_i (come per ogni altro elemento Ω appartenente ad ω_i) anche un altro elemento, *in-*

finitamente vicino ad x_i; si dirà g_m il gruppo degli m elementi Ω *congiunti* ad U nell'elemento multiplo x_i.

Un elemento m^{plo} di U può presentare varie particolarità, relative alle particolarità del gruppo degli elementi congiunti corrispondenti; ordinariamente si classifica l'elemento multiplo secondo la natura della multiplicità nel gruppo dei suoi elementi congiunti. Por l'elemento doppio, se i due elementi congiunti corrispondenti sono coincidenti, esso si dirà elemento doppio x *stazionario* (cuspide).

Una forma U generalmente non ha elementi multipli; perchè ciò possa aver luogo i suoi coefficienti dovranno soddisfare almeno all'equazione risultante che si ottiene eliminando le variabili x, y, z fra le tre equazioni $D_x U=0$, $D_y U=0$, $D_z U=0$; questa *risultante* dicesi il *Discriminante* di U. Ritorneremo in appresso sull'argomento degli elementi multipli, allorchè si tratterà degli *evettanti*.

Sia in notazione ombrale

$$U=(A_1x+B_1y+C_1z)\dots(Ax+By+Cz)\dots(A_nx+B_ny+C_nz)$$

la forma ternaria di grado n; ponendo

$$Ax_i+By_i+Cz_i=p\ ,\qquad Ax_j+By_j+Cz_j=q\ ,$$

si formi l'equazione

$$(3)\qquad (U,\Omega)=(p_1\xi+q_1\eta)\dots(p\xi+q\eta)\dots(p_n\xi+q_n\eta)=0\ ;$$

se il gruppo determinato da Ω in U ha due elementi coincidenti in x, vale a dire se Ω è elemento congiunto di U in x, si annullerà il *discriminante* della forma binaria (U,Ω), sicchè indicando generalmente con $(p):(q)$ una radice $-\eta:\xi$ dell'equazione (3), per la teoria delle forme binarie si avrà la condizione

$$R(U)=\Pi\,[(p_i)(q_j)-(q_i)(p_j)]^2=0\ ,$$

il simbolo Π di prodotto estendendosi a tutte le $\frac{n(n-1)}{2}$ combinazioni a due a due dello radici $(p_i):(q_i)$ e $(p_j):(q_j)$ di (3). Si osservi intanto che essendo $R(U)$ funzione simmetrica delle radici dell'equaziono (3), essa si esprimerà razionalmente con i suoi coefficienti, i quali sono formati

con le diverse radici $(p):(q)$ *precisamente* come sarebbero formati con le diverse *ombre* $p:q$; si avrà dunque simbolicamente

$$R(U)=\Pi(p_i q_j - q_i p_j)^2 = \Pi \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ A_i, & B_i, & C_i \\ A_j, & B_j, & C_j \end{vmatrix}^2, \tag{4}$$

essendo (X, Y, Z) le coordinate di Ω, ed il simbolo Π estendendosi alle $\frac{n(n-1)}{2}$ combinazioni a due a due delle terne di ombre (A_i, B_i, C_i), (A_j, B_j, C_j).

L'equazione $R(U)=0$, tra le coordinate $(X, Y, Z,)$ determina il sistema degli elementi Ω congiunti ad U nei suoi diversi elementi ω; essa è del grado $n(n-1)$ tra le variabili (X, Y, Z) e tra le terne di ômbre (A_i, B_i, C_i), (A_j, B_j, C_j), e quindi del grado $2(n-1)$ tra i coefficienti di U. La forma $R(U)$ è un contravariante di U, e si dirà la *forma congiunta* di U.

Se U è rappresentata da un gruppo g_n di elementi Ω, (A, B, C) perdendo il significato di ombre, diventano vere quantità, cioè le coordinate (X, Y, Z) di Ω; in tal caso la forma congiunta di U essendo rappresentata evidentemente dagli $\frac{n(n-1)}{2}$ elementi ω comuni agli elementi Ω di g_n combinati a due a due (ciascun elemento ω preso due volte) si avrà immediatamente

$$R(U)=\Pi \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ X_i, & Y_i, & Z_i \\ X_j, & Y_j, & Z_j \end{vmatrix}^2.$$

Siano in notazione ombrale

$$U' = (A'_1 x + B'_1 y + C'_1 z) \ldots (A' x + B' y + C' z) \ldots (A'_{n'} x + B'_{n'} y + C'_{n'} z),$$
$$U'' = (A''_1 x + B''_1 y + C''_1 z) \ldots (A'' x + B'' y + C'' z) \ldots (A''_{n''} x + B''_{n''} y + C''_{n''} z),$$

due forme ternarie dei gradi n', n''; ponendo

$$A' x_i + B' y_i + C' z_i = p', \qquad A' x_j + B' y_j + C' z_j = q',$$
$$A'' x_i + B'' y_i + C'' z_i = p'', \qquad A'' x_j + B'' y_j + C'' z_j = q'',$$

si formino l'equazioni

$$(U', \Omega) = (p'_1 \xi + q'_1 \eta) \ldots (p' \xi + q' \eta) \ldots (p'_{n'} \xi + q'_{n'} \eta) = 0,$$
$$(U'', \Omega) = (p''_1 \xi + q''_1 \eta) \ldots (p'' \xi + q'' \eta) \ldots (p''_{n''} \xi + q''_{n''} \eta) = 0; \tag{5}$$

se i gruppi determinati da Ω in U' ed U'' hanno un elemento ω di comune, si annullerà la *risultante* delle forme binarie (U', Ω), (U'', Ω), sicchè indicando generalmente con $(p'):(q')$ e $(p''):(q'')$ una radice $-\eta:\xi$ delle equazioni (5), si avrà la condizione

$$R(U', U'') = \Pi\,[(p')(q'') - (q')(p'')] = 0\,,$$

il simbolo Π di prodotto estendendosi alle $n'n''$ combinazioni di ciascuna radice $(p'):(q')$ con ciascuna radice $(p''):(q'')$. Adunque, ragionando come nella quistione precedente, si avrà simbolicamente

$$R(U', U'') = \Pi(p'q'' - q'p'') = \Pi \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix}, \tag{6}$$

essendo (X, Y, Z) le coordinate di Ω, ed il simbolo Π estendendosi alle $n'n''$ combinazioni di ciascuna terna delle ombre (A', B', C') con ciascuna terna delle ombre (A'', B'', C'').

L'equazione $R(U', U'') = 0$ tra le coordinate (X, Y, Z) determina il gruppo degli $n'n''$ elementi ω comuni ad (U', U''); essa è del grado $n'n''$ tra le variabili (X, Y, Z) e tra le ombre (A', B', C'), (A'', B'', C''), e quindi del grado n'' nei coefficienti di U' e del grado n' nei coefficienti di U.

La forma $R(U', U'')$ è un contravariante, *combinante* di (U', U''), e si dirà la *risultante* del sistema (U', U'').

Se U' ed U'' sono rappresentate da gruppi $g'_{n'}$ e $g''_{n''}$ di elementi Ω, le ombre (A', B', C') ed (A'', B'', C'') diverranno vere quantità, cioè le coordinate (X', Y', Z') ed (X'', Y'', Z'') degli elementi Ω dei gruppi; in tal caso si avrà immediatamente

$$R(U', U'') = \Pi \begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ X', & Y', & Z' \\ X'', & Y'', & Z'' \end{vmatrix}.$$

Siano U', U'', U''' tre forme ternarie dei gradi n', n'', n'''; ponendo per una qualunque delle $n'n''$ combinazioni delle terne di ombre (A', B', C'), (A'', B'', C'')

$$a = B'C'' - C'B''\,, \qquad b = C'A'' - A'C''\,, \qquad c = A'B'' - B'A''\,,$$

si avrà per la risultante $R(U', U'')$ l'espressione

$$R(U', U'') = (a_1X + b_1Y + c_1Z) \ldots (aX + bY + cZ) \ldots (a_{n'n''}X + b_{n'n''}Y + c_{n'n''}Z)\,.$$

Da un'altra parte, indicando con (x, y, z) le coordinate di uno qualunque degli $n'n''$ elementi ω comuni ad (U', U''), si avrà ancora

$$R(U', U'') = (x_1X + y_1Y + z_1Z) \ldots (xX + yY + zZ) \ldots (x_{n'n''}X + y_{n'n''}Y + z_{n'n''}Z) .$$

Ciò posto: se le forme (U', U'', U''') hanno un elemento ω di comune, si avrà la condizione

$$R(U', U'', U''') = \Pi(A_1'''x + B_1'''y + C_1'''z) \ldots (A'''x + B'''y + C'''z) \ldots (A'''_{n'n''}x + B'''_{n'n''}y + C'''_{n'n''}z) = 0 ,$$

il simbolo Π estendendosi a tutte le $n'n''$ terne delle coordinate (x, y, z) degli elementi ω; quindi osservando che $R(U', U', U''')$ si esprime con i coefficienti di $R(U', U'')$, i quali sono formati *allo stesso modo* con le coordinate (x, y, z) o con le ombre (a, b, c), si avrà

$$(7) \qquad R(U', U'', U''') = \Pi \begin{vmatrix} A' , & B' , & C' \\ A'' , & B'' , & C'' \\ A''' , & B''' , & C''' \end{vmatrix} ,$$

il simbolo Π estendendosi a tutte le $n'n''n'''$ combinazioni delle terne di ombre (A', B', C'), (A'', B'', C''), (A''', B''', C''').

La forma $R(U', U'', U''')$ è rispettivamente dei gradi $n''n'''$, $n'''n'$, $n'n''$ nei coefficienti delle forme U', U'', U'''; essa è un *combinante* del sistema delle forme (U', U'', U'''), e si dirà la loro *risultante*.

Se le forme proposte sono rappresentate da gruppi $g_{n'}$, $g_{n''}$, $g_{n'''}$ di elementi Ω si avrà immediatamente

$$R(U', U'', U''') = \Pi \begin{vmatrix} X' , & Y' , & Z' \\ X'' , & Y'' , & Z'' \\ X''' , & Y''' , & Z''' \end{vmatrix} ,$$

il simbolo Π estendendosi a tutte le $n'n''n'''$ combinazioni di ciascun elemento di $g_{n'}$ con ciascun elemento di $g_{n''}$ o con ciascun elemento di $g_{n'''}$.

Segue evidentemente dalle cose dette che il discriminante di una forma U del grado n è del grado $3(n-1)^2$ nei suoi coefficienti.

3. Sistemi armonici dei diversi ordini; ordine e classe delle forme. Essendo S_n il sistema determinato dalla forma ternaria U del grado n, riprendiamo l'equazione

$$(U,\Omega)=\xi^n U_i+\frac{1}{1}\xi^{n-1}\eta\,\Theta_j U_i+\frac{1}{1.2}\xi^{n-2}\eta^2\Theta_j^2 U_i+\ldots.$$

$$\ldots.+\frac{1}{1.2}\eta^{n-2}\xi^2\Theta_i^2 U_j+\frac{1}{1}\eta^{n-1}\xi\,\Theta_i U_j+\eta^n U_j=0\,,$$

che determina rispetto alla coppia fondamentale (ω_i, ω_j) il gruppo G_n degli n elementi ω comuni ad S_n ed Ω; ponendo l'una o l'altra delle condizioni $\Theta_j^r U_i=0$, $\Theta_i^s U_j=0$, nella prima delle quali si riguarda come dato ω_i, e nella seconda come dato ω_j, si ha *) il gruppo $G_{r.i}$ degli elementi armonici ω_j d'ordine r di ω_i, o il gruppo $G_{s.j}$ degli elementi armonici ω_i d'ordine s di ω_j, rispetto al gruppo G_n; variando quindi Ω, rimanendo fisso ω_i o ω_j, l'equazione $\Theta_j^r U_i=0$, o $\Theta_i^s U_j=0$, determinerà il sistema $S_{r.i}$ dei gruppi $G_{r.i}$, o il sistema $S_{s.j}$ dei gruppi $G_{s.j}$; si diranno $S_{r.i}$ ed $S_{s.j}$ *i sistemi armonici d'ordine* r *o* s *di* ω_i *o* ω_j *rispetto al sistema* S_n.

Se r ed s sono *complementari* rispetto ad n, cioè se $r+s=n$, essendo allora identicamente $\Theta_j^r U_i=\Theta_i^s U_j$ si avrà la proprietà: *se* r *ed* s *sono complementari rispetto ad* n, *ed* ω_j *appartiene al sistema armonico d'ordine* r *di* ω_i *rispetto al sistema* S_n, *apparterrà* ω_i *al sistema armonico d'ordine* s *di* ω_j *rispetto al medesimo sistema* S_n: in altri termini ω_i, o pure ω_j, apparterrà a tutti i sistemi $S_{s.j}$, o pure $S_{r.i}$, corrispondenti ai diversi elementi ω_j di $S_{r.i}$, o pure ai diversi elementi ω_i di $S_{s.j}$.

Il sistema $S_{r.i}$ armonico d'ordine r di ω_i rispetto ad S_n essendo determinato dall'equazione $\Theta_i^{n-r}U=0$, il sistema armonico d'ordine s di ω_i rispetto ad $S_{r.i}$ sarà dato dall'equazione $\Theta_i^{r-s}(\Theta_i^{n-r}U)=\Theta_i^{n-s}U=0$, la quale determina ancora il sistema armonico d'ordine s di ω_i rispetto ad S_n; adunque *se* $S_{r.i}$ *è il sistema armonico d'ordine* r *di* ω_i *rispetto ad* S_n, *supposto* $s<r$, *il sistema armonico d'ordine* s *di* ω_i *rispetto ad* S_n *sarà anche il sistema armonico d'ordine* s *di* ω_i *rispetto ad* $S_{r.i}$.

Essendo $\Theta_i^{n-r}U=0$, e $\Theta_j^{n-s}U=0$ le equazioni che determinano i sistemi $S_{r.i}$ ed $S_{s.j}$ armonici d'ordine r ed s di ω_i ed ω_j rispetto ad S_n, i sistemi armonici d'ordine $r+s-n$ di ω_i rispetto ad $S_{r.i}$ e di ω_j rispetto ad $S_{s.j}$ saranno dati rispettivamente dalle equazioni $\Theta_j^{n-s}\Theta_i^{n-r}U=0$, e

*) Memoria prima *sulle forme binarie di grado qualunque*. Atti dell' Accad. Vol. II.

$\Theta_i^{n-r}\Theta_j^{n-s}U=0$, le quali non differiscono tra loro, poichè $\Theta_j\Theta_i=\Theta_i\Theta_j$; adunque *se* $S_{r,i}$ *ed* $S_{s,j}$ *sono rispettivamente i sistemi armonici degli ordini* r *ed* s *di* ω_i *ed* ω_j *rispetto ad* S_n, *il sistema armonico d'ordine* r+s—n *di* ω_j *rispetto ad* $S_{r,i}$ *coinciderà col sistema armonico dello stesso ordine* r+s—n *di* ω_i *rispetto ad* $S_{s,j}$.

Se l'elemento ω_i è multiplo d'ordine m nel sistema S_n, l'equazione $\Theta_i^{n-m+1}U=0$ sarà verificata identicamente qualunque sia ω, avverrà quindi lo stesso per l'equazione $\Theta_i^{n-m+1}(\Theta_j^{n-s}U)=\Theta_j^{n-s}(\Theta_i^{n-m+1}U)=0$; segue da ciò che l'elemento ω_i sarà multiplo d'ordine $s-n+m$ nel sistema $S_{s,j}$ determinato da $\Theta_j^{n-s}U=0$; adunque *se un elemento* ω_i *è multiplo d'ordine* m *nel sistema* S_n, *esso sarà multiplo d'ordine* s—n+m *nel sistema* $S_{s,j}$ *armonico d'ordine* s *di un elemento qualunque* ω_j *rispetto ad* S_n. I gruppi g_m e g_{s-n+m} degli elementi congiunti in ω_i, per S_n e per $S_{s,j}$, saranno determinati rispettivamente da $\Theta_i^{n-m}U=0$, e da $\Theta_i^{n-m}(\Theta_j^{n-s}U)=\Theta_j^{n-s}(\Theta_i^{n-m}U)=0$, sicchè g_{s-n+m} sarà il sistema armonico d'ordine $s-n+m$ di ω_j rispetto a g_m; questo sistema rimane lo stesso per tutti gli elementi ω_j di un elemento Ω appartenente ad ω_j. Inoltre, se un elemento Ω del gruppo g_m è multiplo d'ordine μ, per ogni elemento ω_h di Ω sarà verificata identicamente l'equazione $\Theta_h^{m-\mu+1}(\Theta_i^{n-m}U)=0$, qualunque sia ω, avverrà quindi lo stesso per l'equazione

$$\Theta_h^{m-\mu+1}\Theta_i^{n-m}(\Theta_j^{n-s}U)=\Theta_j^{n-s}\Theta_h^{m-\mu+1}(\Theta_i^{n-m}U)=0\,,$$

sicchè Ω sarà elemento multiplo d'ordine $s-n+\mu$ nel gruppo g_{s-n+m}.

Ritenendo la stessa supposizione riguardo alla multiplicità di ω_i, l'equazione $\Theta_i^{n-m+1}U=0$ sarà verificata identicamente qualunque sia ω, avverrà quindi lo stesso per l'equazione $\Theta_i^{r-m+1}(\Theta_i^{n-r}U)=0$, sicchè ω_i sarà anche elemento multiplo d'ordine m nel sistema $S_{r,i}$ determinato da $\Theta_i^{n-r}U=0$; inoltre il gruppo degli elementi congiunti nell'elemento multiplo ω_i, tanto per S_n quanto per $S_{r,i}$, sarà uno stesso gruppo g_m determinato dall'equazione $\Theta_i^{n-m}U=\Theta_i^{r-m}(\Theta_i^{n-r}U)=0$, adunque *se un elemento* ω_i *è multiplo d'ordine* m *nel sistema* S_n, *esso sarà multiplo dello stesso ordine, e con lo stesso gruppo di elementi congiunti, nel sistema* $S_{r,i}$ *armonico d'ordine* r *di* ω_i *rispetto ad* S_n. Per $r=m$, $S_{r,i}$ si riduce al gruppo g_m degli elementi Ω congiunti ad S_n in ω_i: per $r \leqq m-1$, l'equazione $\Theta_i^{n-r}U=0$ sarà soddisfatta identicamente, sicchè i sistemi armonici, d'ordine inferiore ad m, di ω' rispetto ad S_n saranno indeterminati.

Finalmente, se nel sistema $S_{r,i}$ l'elemento ω_j è multiplo d'ordine ν, si avrà identicamente, qualunque sia ω,

$$\Theta_j^{r-\nu+1}(\Theta_i^{n-r}U)=\Theta_i^{n-r}(\Theta_j^{r-\nu+1}U)=0\ ,$$

e quindi sarà l'elemento ω_i multiplo d'ordine ν nel sistema $S_{n-r+\nu-1,j}$, adunque *se il sistema armonico d'ordine* r *di* ω_i *rispetto ad* S$_n$ *ha l'elemento* ω_j *multiplo d'ordine* ν, *il sistema armonico d'ordine* n—r+ν—1 *di* ω_j *rispetto ad* S_n *avrà l'elemento* ω_i *anche multiplo d'ordine* ν.

Essendo il sistema armonico di 1° ordine di un elemento ω_i di U l'elemento Ω congiunto ad U in ω_i, se Ω dovesse appartenere ad un elemento ω_j, sarebbe x_i uno degli elementi comuni ad U e $\Theta_j U$, sicchè indicando con N il numero di questi elementi Ω congiunti ad U ed appartenenti ad ω_j sarà in generale $N=n(n-1)$; si osservi però che se U ha un elemento ω_i multiplo d'ordine m, e col gruppo g_m degli elementi congiunti dotato di un elemento Ω_i multiplo d'ordine μ, avrà $\Theta_j U$ l'elemento ω_i multiplo d'ordine $m-1$, e nel gruppo g_{m-1} dei suoi elementi congiunti sarà l'elemento Ω_i multiplo d'ordine $\mu-1$, sicchè ω_i conterà per $m(m-1)+\mu-1$ tra gli elementi comuni ad U e $\Theta_j U$, e poichè $\omega_j\omega_i$ non si riguarda propriamente come elemento congiunto di U in ω_i, il suddetto numero N diverrà in tal caso $N=n(n-1)-m(m-1)-(\mu-1)$. Segue da ciò che indicando rispettivamente con δ e $\varkappa$ i numeri degli elementi doppii ordinarii e degli elementi doppii stazionarii di U (se mai li abbia), il numero N degli elementi congiunti Ω di U appartenenti ad un elemento arbitrario ω sarà $N=n(n-1)-2\delta-3\varkappa$. Paragonando questi diversi valori di N si vedrà che un elemento multiplo d'ordine m con μ elementi congiunti coincidenti produce nel valore generale di N la stessa diminuzione che vi apportano $\frac{m(m-1)}{2}-(\mu-1)$ elementi doppii ordinarii, e $(\mu-1)$ elementi doppii stazionarii.

Se ω_i è un elemento di U multiplo d'ordine m, osservando che esso è anche per $\Theta_i U$ multiplo d'ordine m, e con gli stessi elementi congiunti, sarà il numero degli altri elementi congiunti di U appartenenti ad ω_i espresso da $N_i=n(n-1)-m(m+1)$, e se inoltre U ha δ elementi doppii ordinarii, e $\varkappa$ elementi doppii stazionarii, si avrà

$$N_i=n(n-1)-m(m+1)-2\delta-3\varkappa\ .$$

Siano U ed u due forme congiunte, rispettivamente dei gradi n ed N

tra le variabili (x, y, z) ed (X, Y, Z); si diranno n ed N *l'ordine* e la *classe* del sistema (U, u); l'ordine indica il numero degli elementi x di U appartenenti ad un elemento Ω, e la classe indica il numero degli elementi Ω di u appartenenti ad un elemento x; dinotando con δ e $\varkappa$ i numeri degli elementi x doppii ordinarii, e doppii stazionarii di U, e con Δ e K i numeri degli elementi Ω doppii ordinarii (elementi doppiamente congiunti di U) e doppii stazionarii (elementi congiunti d'inflessione di U) di u, si avranno per le cose dette le relazioni

$$(1) \quad N=n(n-1)-2\delta-3\varkappa\,, \qquad (2) \quad n=N(N-1)-2\Delta-3K\,.$$

Si perviene ad un'altra relazione tra i numeri $(n, \delta, \varkappa; N, \Delta, K)$ con le considerazioni seguenti.

La forma U di grado n contenendo $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti (quante sono le partizioni (α, β, γ) dell'esponente n) essa può essere assoggettata ad $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\frac{n(n+3)}{2}$ condizioni; ora per ogni elemento doppio ordinario che la forma dovesse avere si ha già (come è facile vedere) una condizione, e per ogni elemento doppio stazionario si hanno due condizioni, sicchè la forma U che debba essere dotata di δ e $\varkappa$ elementi doppii, ordinarii e stazionarii, potrà essere inoltre assoggettata ad $\frac{n(n+3)}{2}-\delta-2\varkappa$ condizioni: similmente la forma congiunta u potrà essere assoggettata ad $\frac{N(N+3)}{2}-\Delta-2K$ condizioni; adunque osservando che data U resta determinata u, o viceversa, si avrà

$$(3) \qquad \frac{n(n+3)}{2}-\delta-2\varkappa=\frac{N(N+3)}{2}-\Delta-2K\,.$$

Dalle equazioni (1), (2) e (3) si traggono le altre

$$(4) \quad K=3n(n-2)-6\delta-8\varkappa\,, \qquad (5) \quad \varkappa=3N(N-2)-6\Delta-8K\,,$$

$$\varkappa-K=3(n-N)\,, \qquad 2(\delta-\Delta)=(n-N)(n+N-9)\,.$$

Dati tre dei numeri $(n, \delta, \varkappa; N, \Delta, K)$, per mezzo delle equazioni (1), (2) e (3) si ottengono gli altri tre; così per Δ o δ, allorchè sono

dati $(n, \delta, \varkappa)$ o (N, Δ, K) si hanno le formole

$$\Delta = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9)-(2\delta+3\varkappa)(n^2-n-6) \tag{6}$$
$$+2\delta(\delta-1)+\frac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1)+6\delta\varkappa ,$$

$$\delta = \frac{1}{2} N(N-2)(N^2-9)-(2\Delta+3K)(N^2-N-6) \tag{7}$$
$$+2\Delta(\Delta-1)+\frac{9}{2}K(K-1)+6\Delta K ,$$

come per K o $\varkappa$ si hanno già le formole (4) e (5), e per N o n le formole (1) e (2).

Nel caso generale di U, o pure di u, nel quale $\delta=0$, e $\varkappa=0$, o pure $\Delta=0$, e $K=0$, si avrà

$$K=3n(n-2) , \qquad \Delta=\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) ,$$

o pure

$$\varkappa=3N(N-2) , \qquad \delta=\frac{1}{2}N(N-2)(N^2-9) ,$$

e paragonando queste formole con le precedenti si vedrà il cambiamento che si produce in esse per ogni elemento doppio della forma, sia ordinario, sia stazionario.

All'equazione (3) per mezzo di (1) e (2) può darsi la forma

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}-(\delta+\varkappa)=\frac{(N-1)(N-2)}{2}-(\Delta+K) . \tag{8}$$

Il numero $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ esprime il massimo numero di elementi doppii ω (tra ordinarii e stazionarii) che possa avere una forma U di grado n, senza decomporsi in forme di gradi inferiori; ed infatti supposto un altro elemento doppio in U, gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ elementi doppii di U ed altri $n-3$ suoi elementi arbitrarii, in tutto $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}$ elementi ω, determinano una forma ternaria del grado $n-2$ appartenente ad essi, la quale avrebbe con U $2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1\right]+n-3=n(n-2)+1$ elementi comuni, il che non può aver luogo, se la forma U non è composta da altre di grado inferiore. Adunque il primo membro dell'equazione (8)

dinota la differenza tra il numero *possibile* e l'*attuale* degli elementi doppii di U; analogamente pel secondo membro della stessa equazione rispetto alla forma congiunta u; la suddetta differenza dicesi il *genere* del sistema (U, u), e la sua considerazione, proposta da Clebsch, si riattacca alle più profonde ricerche nella teoria delle forme ternarie.

4. Emananti puri e misti. La forma $\Theta_i^m U$ rappresentata dal sistema $S_{n-m.i}$ armonico d'ordine $n-m$ di un elemento ϖ_i rispetto al sistema S_n, corrispondente alla forma U, si dice *l'emanante puro* m^{mo} di U rispetto ad (x_i, y_i, z_i), o pure rispetto ad ϖ_i. Ogni forma ternaria pura U di grado n ha quindi $n-1$ emananti puri rispetto ad un elemento, cioè $\Theta_i^1 U, \Theta_i^2 U \ldots \Theta_i^{n-1} U$, forme di 1° grado nei coefficienti di U, dei gradi $1, 2 \ldots n-1$ rispetto ad (x_i, y_i, z_i), e dei gradi $n-1, n-2 \ldots 1$, rispetto alle variabili (x, y, z). L'emanante d'ordine zero è la stessa forma U. Per l'emanante n^{mo} di U si ha $\Theta_i^n U = 1 \,.\, 2 \ldots n \, U_i$, cioè tale emanante è una costante; gli emananti d'ordine superiore ad n sono poi eguali a zero.

Se i numeri r ed s sono complementari rispetto ad n, si avrà

$$(1) \quad \frac{\Theta_i^r U_j}{1.2 \ldots r} = \frac{\Theta_j^s U_i}{1.2 \ldots s} = \frac{\Theta_i^r \Theta_j^s U}{1.2 \ldots r \times 1.2 \ldots s} = \Sigma P(\varpi_i \Omega, r) P(\varpi_j \Omega, s) \,,$$

considerando un gruppo g_n di elementi Ω condotti rispettivamente, ad arbitrio, per gli elementi ϖ del gruppo G_n comune ad $\varpi_i \varpi_j$ ed S_n, od estendendo la somma Σ a tutt'i prodotti delle combinazioni complementari $P(\varpi_i \Omega, r)$ e $P(\varpi_j \Omega, s)$ tra le potenze $P . \varpi_i \Omega$ e $P . \varpi_j \Omega$ di ϖ_i ed ϖ_j rispetto ad r e ad s elementi Ω del gruppo g_n.

Le coppie di elementi ϖ_i ed ϖ_j che verificano l'equazione

$$\Theta(r, s) U = \Theta_i^r \Theta_j^s U = 0 \,,$$

si diranno appartenere all'*emanante misto di* U *corrispondente alla partizione* (r, s) *di* n.

Generalmente la forma $\Theta_1^{n_1} \Theta_2^{n_2} \ldots \Theta_{\mu-1}^{n_{\mu-1}} U$ dicesi emanante misto di U rispetto ad $(\varpi_1, \varpi_2 \ldots \varpi_{\mu-1})$ di multiplicità $n_1, n_2 \ldots n_{\mu-1}$: ponendo $n_1 + n_2 \ldots + n_{\mu-1} + n_\mu = n$, il sistema d'ordine n_μ di elementi ϖ, determinato da quell'emanante misto, si dirà sistema armonico d'ordine n_μ rispetto ad S_n, relativo al gruppo di elementi $(\varpi_1, \varpi_2 \ldots \varpi_{\mu-1})$ di multiplicità $(n_1, n_2 \ldots n_{\mu-1})$. Se i numeri $n_1, n_2 \ldots n_{\mu-1}$ sono eguali all'unità

si indicherà ancora l'emananto misto più brevemente con $\Theta(\mu-1)U$.
I gruppi di elementi $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\mu)$ che verificano l'equazione

$$\Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U = \Theta_1^{n_1}\Theta_2^{n_2}\dots\Theta_\mu^{n_\mu}U = 0\,,$$

si diranno appartonere all'emanante misto di U corrispondente alla partizione $(n_1, n_2 \dots n_\mu)$ di n.

Essendo $U=(Ax+By+Cz)_n^n=0$, ed $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\mu)$ un gruppo qualunque G_μ di elementi ω, si ponga

$$(2)\quad x=t_1x_1 \dots + t_ix_i \dots + t_\mu x_\mu\,,\; y=t_1y_1 \dots + t_iy_i \dots + t_\mu y_\mu\,,\; z=t_1z_1 \dots + t_iz_i \dots + t_\mu z_\mu\,;$$

si avrà pel coefficiente del termine dello sviluppo di U in cui gli esponenti di t corrispondono alla partizione $(n_1, n_2 \dots n_\mu)$ di n, l'espressione

$$T(n_1, n_2 \dots n_\mu) = \frac{(n)}{(n_1)(n_2)\dots(n_\mu)}(Ax_1+By_1+Cz_1)_{n_1}^{n_1}\dots(Ax_\mu+By_\mu+Cz_\mu)_{n_\mu}^{n_\mu}$$

$$= \frac{\Theta_1^{n_1}\Theta_2^{n_2}\dots\Theta_\mu^{n_\mu}U}{(n_1)(n_2)\dots(n_\mu)}\,,$$

osservando cho in generale si ha

$$\Theta_i^{n_i}U = n(n-1)\dots(n-n_i+1)(Ax_i+By_i+Cz_i)_{n_i}^{n_i}(Ax+By+Cz)_{n-n_i}^{n-n_i}\,.$$

Si avrà dunque la relazione

$$(3)\qquad \Sigma\, T(n_1, n_2 \dots n_\mu)\, t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_\mu^{n_\mu} = 0\,,$$

la somma Σ estendendosi a tutte le partizioni $(n_1, n_2 \dots n_\mu)$ di n.

Ciò posto; supponiamo da principio che la forma U sia rappresentata da un gruppo g_n di elementi Ω; per ciascuno di essi si avrà la relaziono

$$t_1 P.\omega_1\Omega + t_2 P.\omega_2\Omega \dots + t_\mu P.\omega_\mu\Omega = 0\,,$$

sicchè moltiplicando tra loro le n relazioni analoghe, corrispondenti ai diversi elementi di g_n, si avrà evidentemente

$$(4)\qquad \Sigma\left\{\Sigma . P(\omega_1\Omega, n_1)P(\omega_2\Omega, n_2)\dots\dots P(\omega_\mu\Omega, n_\mu)\right\} t_1^{n_1} t_2^{n_2} \dots t_\mu^{n_\mu} = 0\,,$$

il primo Σ estendendosi a tutte le partizioni $(n_1, n_2 \dots n_\mu)$ di n, ed il se-

condo Σ, per ciascuna di queste partizioni, estendendosi a tutt'i prodotti delle combinazioni complementari, corrispondenti agli elementi $(n_1, n_2 \dots n_\mu)$ della partizione, delle potenze $P.\omega_i\Omega$ dei diversi elementi ω_i di G_n, rispetto ai diversi elementi Ω del gruppo g_n.

Dal paragone delle equazioni (3) e (4) si trae la relazione

$$(5) \quad \Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U = (n_1)(n_2)\dots(n_\mu)\sum P(\omega_1\Omega, n_1)P(\omega_2\Omega, n_2)\dots P(\omega_\mu\Omega, n_\mu).$$

Supponiamo ora che U sia una forma qualunque di grado n; ponendo $\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\nu$, indicando con U_i una forma ternaria rappresentata da un gruppo arbitrario $g_{n.i}$ di elementi Ω_i, e con λ_i un coefficiente convenevolmente determinato, potrà sempre supporsi

$$U = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \dots + \lambda_i U_i \dots + \lambda_\nu U_\nu,$$

e quindi osservando che

$$\Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U = \sum_1^\nu \lambda_i \Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U_i,$$

ponendo per compendio

$$\sum P(\omega_1\Omega_i, n_1)P(\omega_2\Omega_i, n_2)\dots P(\omega_\mu\Omega_i, n_\mu) = P(G_n, g_{n.i}),$$

si avrà

$$(6) \quad \Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U = (n_1)(n_2)\dots(n_\mu)\sum_1^\nu \lambda_i P(G_n, g_{n.i}).$$

Le relazioni (1), (5) e (6) mostrano che ogni emanante della forma U è un covariante di U.

Per ottenere un gruppo $(\omega_1, \omega_2 \dots \omega_\mu)$ di elementi appartenenti all'emanante misto $\Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U$, si troverà il sistema $S_{n-n_1.1}$ armonico d'ordine $n-n_1$ di un elemento arbitrario ω_1 rispetto ad S_n, indi il sistema $S_{n-n_1-n_2.2}$ armonico d'ordine $n-n_1-n_2$ di un altro elemento arbitrario ω_2 rispetto ad $S_{n-n_1.1}$, e così di seguito sino all'elemento arbitrario $\omega_{\mu-1}$ di cui si troverà il sistema $S_{n_\mu.\mu-1}$ armonico d'ordine n_μ rispetto al sistema precedente $S_{n_{\mu-1}.n_\mu.\mu-2}$; sarà $S_{n_\mu.\mu-1}$ la rappresentazione dell'emanante misto $\Theta^{n_1}_1\Theta^{n_2}_2\dots\Theta^{n_{\mu-1}}_{\mu-1}U$; gli elementi arbitrarii poi ω_1, $\omega_2 \dots \omega_{\mu-1}$ ed un elemento qualunque ω_μ del sistema $S_{n_\mu.\mu-1}$ apparterranno all'emanante misto $\Theta(n_1, n_2 \dots n_\mu)U$.

Essendo $\Theta_i \Theta_j = \Theta_j \Theta_i$, se il gruppo $(\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\mu)$ appartiene all'emanante misto di U corrispondente alla partizione $(n_1, n_2 \ldots n_\mu)$ di n, e sugl'indici $1, 2 \ldots \mu$ delle ω o delle n si esegue una stessa permutazione, il nuovo gruppo apparterrà ancora al nuovo emanante.

Sia l'elemento ω_k appartenente ad Ω, determinato rispetto ad una coppia di elementi (ω_i, ω_j) di Ω dal rapporto $\xi : \eta$, vale a dire si abbia

$$x_k = \xi x_i + \eta x_j \,, \qquad y_k = \xi y_i + \eta y_j \,, \qquad z_k = \xi z_i + \eta z_j \,,$$

sarà $\Theta_k^m U = (\xi \Theta_i + \eta \Theta_j)^m U$. Variando ω_k in Ω, gli emananti $\Theta_k^m U$ costituiranno *una serie semplice del grado* m (rispetto alla variabile $\xi : \eta$); il loro *inviluppo*, cioè la forma costituita dai gruppi di $(n-m)^a$ elementi ω comuni a due di quegli emananti consecutivi $\Theta_k^m U$, e che evidentemente è congiunta con essi in ω, si otterrà eliminando $\xi : \eta$ tra le due equazioni

$$(7) \qquad (\xi \Theta_i + \eta \Theta_j)^{m-1} \Theta_i U = 0 \,, \qquad (\xi \Theta_i + \eta \Theta_j)^{m-1} \Theta_j U = 0 \,;$$

il risultato, che indicheremo con $\theta^m U$ e chiameremo *l'emanante* m^{mo}, *di* U *rispetto all'elemento* Ω, sarà del grado $2(m-1)$ nei coefficienti di U, e del grado $2(n-m)(m-1)$ in (x, y, z). Sia ω_h uno degli elementi ω in cui la forma $\theta^m U$ è congiunta con l'emanante $\Theta_k^m U$ corrispondente ad una posizione particolare di ω_k; se nell'equazioni (7) s'intendano poste per (x, y, z) le coordinate (x_h, y_h, z_h) di ω_h, si vedrà facilmente come quelle equazioni esprimano le condizioni affinchè l'emanante $\Theta_h^{n-m} U$, o sia $\Theta^m U_h$, sia congiunto con Ω in ω_k, sicchè l'emanante m^{mo} di U rispetto ad Ω, cioè l'inviluppo degli emananti $\Theta_k^m U$ corrispondenti ai diversi elementi ω_k appartenenti ad Ω, è costituito dagli elementi ω_h, di cui gli emananti $\Theta_h^{n-m} U$ sono congiunti con Ω.

Il risultato $\theta^m U$ dell'eliminazione di $\xi : \eta$ tra le equazioni (7) esprimendo la condizione affinchè l'emanante $(n-m)^{mo}$ di U rispetto ad ω sia congiunto con Ω, non differirà $\theta^m U$ dalla forma congiunta di tale emanante, sicchè potrà esprimersi con le coordinate (X, Y, Z) di Ω, e sarà del grado $m(m-1)$ tra queste variabili, se quell'emanante non ha elementi multipli. Per ogni coppia di elementi Ω ed ω che verificano l'equazione $\theta^m U = 0$, mentre alla forma congiunta dell'emanante $(n-m)^{mo}$ di U rispetto ad ω appartiene Ω, all'emanante m^{mo} di U rispetto ad Ω apparterrà ω, sicchè come l'emanante $(n-m)^{mo}$ di U rispetto ad ω_h è una forma costituita dagli elementi ω tali che all'emanante m^{mo} di U ri-

spetto ad ϖ appartiene l'elemento ϖ_λ, così la forma congiunta dell'emanante $(n-m)^{mo}$ di U rispetto ad ϖ_λ è costituita dagli elementi Ω tali che all'emanante m^{mo} di U rispetto ad Ω appartiene anche l'elemento ϖ_λ.

5. **Armonizzanti.** Consideriamo il più semplice degli emananti misti di U, che corrisponde alla supposizione dei numeri $n_1, n_2, \dots n_\mu$ tutti eguali all'unità, e quindi a quella di $\mu = n$. Indicando questo emanante con $\Theta(n)\,U$, sarà

$$\begin{aligned}\Theta(n)U &= (x_1 D_x + y_1 D_y + z_1 D_z)\dots(x_i D_x + y_i D_y + z_i D_z)\dots(x_n D_x + y_n D_y + z_n D_z)U \\ &= \Sigma(\Sigma \Pi^\alpha x_i \Pi^\beta y_i \Pi^\gamma z_i)\, D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U, \end{aligned} \quad (1)$$

il primo Σ estendendosi a tutte le partizioni (α, β, γ) di n, ed il secondo Σ, per ciascuna di queste partizioni, estendendosi a tutt'i prodotti delle combinazioni complementari di α tra le x_i, di β tra le y_i e di γ tra le z_i. I gruppi di elementi $(\varpi_1 \dots \varpi_i \dots \varpi_n)$ che verificano l'equazione $\Theta(n)U = 0$ si diranno *coniugati armonici rispetto ad* U.

Essendo

$$U = \Sigma \frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} A_\alpha B_\beta C_\gamma x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

indichiamo con

$$u = \Sigma \frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} a_\alpha b_\beta c_\gamma X^\alpha Y^\beta Z^\gamma,$$

la forma che, eguagliata a zero, determina un gruppo G_n di elementi $(\varpi_1 \dots \varpi_i \dots \varpi_n)$ coniugati armonici rispetto ad U; poichè

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma = \frac{(\alpha)(\beta)(\gamma)}{n} \Sigma(\Pi^\alpha x_i \Pi^\beta y_i \Pi^\gamma z_i),$$

(la somma Σ estendendosi a tutt'i prodotti delle combinazioni complementari di α tra le x_i, di β tra le y_i e di γ tra le z_i), osservando che si ha

$$\frac{D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U}{1.2.3\dots n} = A_\alpha B_\beta C_\gamma,$$

l'equazione (1) darà, per la condizione affinchè il gruppo determinato da u sia coniugato armonico rispetto ad U, la relazione

$$\frac{\Theta(n)U}{1.2.3\dots n} = \Sigma \frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} A_\alpha B_\beta C_\gamma \,.\, a_\alpha b_\beta c_\gamma = 0. \quad (2)$$

Se tutti gli elementi del gruppo $(\varpi_1 \dots \varpi_i \dots \varpi_n)$ determinato da u coin-

cidono con l'elemento ω, la condizione affinchè quel gruppo sia coniugato armonico rispetto ad U equivale a dire che l'elemento ω appartenga ad U.

Sia ora u una forma ternaria qualunque di grado n, rappresentata da un sistema d'infiniti elementi Ω; se l'equazione (2) formata con i coefficienti $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ ed $a_\alpha b_\beta c_\gamma$ di U ed u è soddisfatta, si diranno le due forme U ed u *coniugate armoniche tra loro*. Indicando con $(u_1 \dots u_i \dots u_\nu)$, $\left(\nu = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)$ forme ternarie rappresentate da gruppi $(G_{n.1} \dots G_{n.i} \dots G_{n.\nu})$ di elementi Ω coniugati armonici rispetto ad U, e con $(\Lambda_1 \dots \Delta_i \dots \Lambda_\nu)$ coefficienti arbitrarii, l'espressione più generale di una forma u coniugata armonica rispetto ad U sarà

$$(3) \qquad u = \Lambda_1 u_1 \dots + \Lambda_i u_i \dots + \Lambda_\nu u_\nu \,.$$

Variando i coefficienti Λ_i le forme u costituiranno una *serie lineare* $(\nu-1)^{pla}$; ogni forma u della serie è *armonica* rispetto ad U. Più generalmente, se $(u_1 \dots u_i \dots u_\nu)$ è un gruppo di forme armoniche rispetto ad U, ogni forma u della serie (3) così generalizzata, sarà anche armonica rispetto ad U. Conoscendo una forma u armonica rispetto ad U, ed appartenente alla serie $(\nu-2)^{pla}$ definita dal gruppo $(u_1 \dots u_i \dots u_{\nu-1})$, ogni forma u appartenente alla serie *semplice* definita dalla forma proposta unita ad u_ν, sarà una forma armonica rispetto ad U, appartenente alla serie $(\nu-1)^{pla}$ definita dal gruppo $(u_1 \dots u_i \dots u_\nu)$; partendo dalla serie semplice delle forme armoniche rispetto ad U (nella quale ad ogni forma u della serie appartengono gli elementi Ω che *congiungono* tra loro gli elementi ω di due gruppi coniugati armonici rispetto ad U) si determinerà quindi facilmente una forma armonica rispetto ad U, appartenente ad una serie multipla qualunque.

Indicando con $I(U, u)$ il primo membro dell'equazione (2) formato con i coefficienti di due forme ternarie U ed u dello stesso grado, l'una tra le variabili (x, y, z) e l'altra tra le variabili (X, Y, Z), si dirà l'invariante $I(U,u)$ *l'armonizzante* del sistema (U, u). In notazione simbolica sarà

$$(4) \qquad I(U, u) = (Aa + Bb + Cc)_n^n \,.$$

Siano

$$U' = (A'x + B'y + C'z)_n^n \,, \qquad \text{ed} \qquad U'' = (A''x + B''y + C''z)_n^n$$

due forme ternarie dello stesso grado; ponendo

$$p' = A'x_i + B'y_i + C'z_i \,, \qquad p'' = A''x_i + B''y_i + C''z_i$$
$$q' = A'x_j + B'y_j + C'z_j \,, \qquad q'' = A''x_j + B''y_j + C''z_j$$

formiamo le equazioni

$$(U', \Omega) = (p'\xi + q'\eta)_n^n = 0\,, \qquad (U'', \Omega) = (p''\xi + q''\eta)_n^n = 0\,;$$

se i gruppi G_n' e G_n'' determinati da Ω in U' ed U'' sono *) *coniugati armonici tra loro* si avrà la condizione $(r+s=n)$

$$w(U', U'') \Sigma (-)^r \frac{(n)}{(r)(s)} p_r' q_s' \cdot p_s'' q_r'' = (p'q'' - q'p'')_n^n$$

$$(5) \qquad = \begin{vmatrix} X\,, & Y\,, & Z \\ A'\,, & B'\,, & C' \\ A''\,, & B''\,, & C'' \end{vmatrix}^n = 0\,,$$

essendo (X, Y, Z) le coordinate di Ω.

La forma $w(U', U'')$, di 1° grado nei coefficienti di U' e di U'', e di grado n tra le variabili (X, Y, Z) è un contravariante di grado n del sistema (U', U''), ed ogni suo elemento Ω determina in U' ed U'' due gruppi G_n' e G_n'' di elementi ∞ coniugati armonici tra loro. Si dirà $w(U', U'')$ *l'armonizzante* del sistema (U', U'').

So le due forme U', U'' s'identificano con una stessa forma U, sarà, per n dispari, w identicamente nullo; per n pari sarà poi w un contravariante di U, ogni elemento Ω del qualo determina in U un gruppo G_n di elementi ∞, *armonico con se stesso*; indicando allora con $w(U)$ la forma a cui si riduce $w(U', U'')$, si dirà $w(U)$ *l'armonizzante* di U.

Se la forma $w(U', U'')$ è armonica rispetto ad un'altra forma U dello stesso grado, sarà per l'equazioni (4) e (5), (osservando che si ha in tal caso $a = B'C'' - C'B''$, $b = C'A'' - A'C''$, $c = A'B'' - B'A''$)

$$(6) \qquad I(U, w) = \begin{vmatrix} A\,, & B\,, & C \\ A'\,, & B'\,, & C' \\ A''\,, & B''\,, & C'' \end{vmatrix}^n = I(U, U', U'') = 0\,.$$

Essendo (U', U'', U''') una terna di forme dello stesso grado n, (w', w'', w''') gli armonizzanti di (U'', U'''), (U''', U'), (U', U''), e (W', W'', W''') gli armonizzanti di (w'', w'''), (w''', w'), (w', w'') (applicando tutto ciò che si è detto pre-

*) Memoria prima *sulle forme binarie di grado qualunque*. Atti dell'Accad. Vol. III.

cedentemente alle forme ternarie tra lo variabili X, Y, Z), si avranno lo relazioni

$$I(U',w')=I(U'',w'')=I(U''',w''')=I(U',U'',U''')\,,$$

$$(7) \qquad I(w',w'',w''')=I^n(U',U'',U''')$$

$$W'=I(U',U'',U''')U',\ \ W''=I(U',U'',U''')U'',\ \ W'''=I(U',U'',U''')U'''.$$

L'invariante $I(U', U'', U''')$ di 1° grado nei cofficienti delle tre forme U', U'', U''', di uno stesso grado n, esprime col suo annullarsi, che il contravariante armonizzante di due qualunque delle tre forme proposte è una forma armonica rispetto alls terza forms; si dirà allora (U', U'', U''') una terna di forme *coniugate armoniche tra loro*, ed $I(U', U'', U''')$ il loro *armonizzante*. Se due tra, o tutte e tre le forme proposte s'identificano tra loro, l'invariante I si annullerà identicamente per n dispari; se poi si suppone n pari, e le tre forme (U', U'', U''') si identificano con una forma U, l'invariante $I(U', U'', U''')$, che indicheremo allora con $I(U)$ e diremo *l'armonizzante* di U, sarà di 3° grado nei coefficienti di U; in tal caso s'identificheranno (w', w'', w''') con una stessa forma w, e (W', W'', W''') con $I(U)U$; segue da ciò che se w è l'armonizzante di una forma di grado pari U, sarà viceversa $I(U)U$ l'armonizzante della forma w. Allorchè $I(U)=0$, l'armonizzante $w(U)$ di U sarà una forma armonica rispetto ad U; si dirà allora U una forma *armonica con se stessa*.

6. **Armonizzanti degli emananti, concomitanti associati, ed altri concomitanti.** Considerando i diversi emananti puri di U rispetto ad un elemento x, il contravariante armonizzante dell'$(n-m)^{mo}$ di essi (supposto m pari) sarà un concomitante misto di U, di 2° grado nei coefficienti di U, del grado $2(n-m)$ nelle variabili (x, y, z), e del grado m nelle variabili (X, Y, Z); esso stabilisce una dipendenza tra gli elementi x ed Ω tale che per ciascuna coppia (x, Ω) che la verifica, il gruppo G_m determinato da Ω nel sistema armonico d'ordine pari m di x rispetto ad U è armonico con se stesso. Dando ad m i diversi valori pari compresi da $n-1$ ad 1, si avrà così una *scala* di concomitanti misti di U (gli *armonizzanti misti degli emananti di* U) tutti di 2° grado nei coefficienti di U, e rispettivamente nelle variabili (x, y, z) ed (X, Y, Z) dei gradi $2, 6, 10 \ldots 2(n-2)$ ed $n-1$, $n-3 \ldots 2$, o pure $4, 8, 12 \ldots 2(n-2)$ ed $n-2$, $n-4 \ldots 2$, secondo che n è dispari o pari. L'ultimo di questi concomitanti esprime tra le variabili (X, Y, Z) la quadrica armonica (sistema armonico di 2° ordine) di x rispetto ad U.

Essendo U una forma ternaria di grado n, se di un elemento ω si prende rispetto a questa forma l'emanante $(n-m)^{me}$, l'invariante armonizzante di questo emanante (supposto m pari) sarà un covariante di U, di 3° grado nei coefficienti di U, e del grado $3(n-m)$ nelle variabili (x, y, z); per ciascun elemento ω di questo covariante il suo sistema armonico d'ordine pari m rispetto ad U è armonico con se stesso. Dando ad m i valori pari compresi da $n-1$ ad 1, si avrà così una scala di covarianti di U (gli *armonizzanti puri degli emananti di* U) tutti di 3° grado nei coefficienti di U e dei gradi $3, 9, 15, \ldots 3(n-2)$, o pure $6, 12, 18 \ldots 3(n-2)$ nelle variabili (x, y, z), secondo che n è dispari o pari. L'ultimo di questi covarianti, espresso da

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2U}{dx^2}, & \frac{d^2U}{dxdy}, & \frac{d^2U}{dxdz} \\ \frac{d^2U}{dydx}, & \frac{d^2U}{dy^2}, & \frac{d^2U}{dydz} \\ \frac{d^2U}{dzdx}, & \frac{d^2U}{dzdy}, & \frac{d^2U}{dz^2} \end{vmatrix}$$

si dice l'Hessiano di U, ed il suo annullarsi esprime la condizione affinchè la quadrica armonica di ω rispetto ad U si riduca ad una coppia di elementi Ω.

Siano U, u due forme ternarie di grado pari n, ciascuna delle quali siano l'armonizzante dell'altra; considerando i diversi emananti puri di u rispetto ad un elemento Ω, il covariante armonizzante dell'$(n-m)^{mo}$ di essi (supposto m pari) sarà un concomitante misto di U, di 4° grado nei coefficienti di U, del grado $2(n-m)$ nelle variabili (X, Y, Z), e del grado m nelle variabili (x, y, z); per ciascuna coppia di elementi (Ω, ω) che lo annullano, il gruppo g_m determinato da ω nel sistema armonico d'ordine m di Ω rispetto ad u è armonico con se stesso. Dando ad m i valori $n-2, n-4 \ldots 2$, si avrà così una scala di concomitanti misti di U (gli *armonizzanti misti degli emananti di* u) tutti di 4° grado nei coefficienti di U, e rispettivamente nelle variabili (X, Y, Z) ed (x, y, z) dei gradi $4, 8, 12 \ldots 2(n-2)$ ed $n-2, n-4 \ldots 2$. L'ultimo di questi concomitanti esprime tra le variabili (x, y, z) la quadrica armonica di Ω rispetto ad u.

Se dell'emananto $(n-m)^{mo}$ di Ω rispetto ad u si prende l'invariante

armonizzante (supposto m pari) si avrà un contravariante di U, di 6° grado nei coefficienti di U, e del grado $3(n-m)$ nelle variabili (X, Y, Z); per ciascun elemento Ω di questo contravariante, il suo sistema armonico d'ordine pari m rispetto ad u è armonico con se stesso. Dando ad m i valori $n-2$, $n-4 \ldots 2$, si avrà così una scala di contravarianti di U (gli *armonizzanti puri degli emananti di* u) tutti di 6° grado nei coefficienti di U, o dei gradi $6, 12, 18 \ldots 3(n-2)$ nelle variabili (X, Y, Z).

Se di due elementi ω' ed ω'' si prendono rispetto ad U gli emananti $(n-m)^{m'}$, il contravariante armonizzante di questi due emananti sarà un concomitante misto di U, di 2° grado nei coefficienti di U, del grado $(n-m)$ tra le coordinate sì di ω' che di ω'', e del grado m tra le coordinate di Ω; per ciascuna terna di elementi $(\omega', \omega'', \Omega)$ appartenente a questo concomitante, i gruppi G'_m e G''_m determinati da Ω nei sistemi armonici d'ordine m di ω' ed ω'' rispetto ad U sono coniugati armonici tra loro. La forma simbolica di questo concomitante sarà

$$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix}^m (A'x'+B'y'+C'z')_{n-m}^{n-m} (A''x''+B''y''+C''z'')_{n-m}^{n-m},$$

ricordandosi d'identificare dopo lo sviluppo le quantità $A'_\alpha B'_\beta C'_\gamma$ ed $A''_\alpha B''_\beta C''_\gamma$, corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di n, con il coefficiente $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ di U. Se ω' ed ω'' coincidono con ω, ed m è pari, si avranno gli armonizzanti misti degli emananti di U.

In modo analogo si procederebbe rispetto alla forma u, contravariante armonizzante della forma di grado pari U.

Se di tre elementi $\omega', \omega'', \omega'''$ si prendono rispetto ad U gli emananti $(n-m)^{m'}$, l'invariante armonizzante di questi tre emananti sarà un covariante misto di U, di 3° grado nei coefficienti di U, e del grado $n-m$ tra le coordinate di ciascuno degli elementi $\omega', \omega'', \omega'''$; per ciascuna terna di elementi $(\omega', \omega'', \omega''')$ appartenente a questo covariante, i sistemi armonici d'ordine m di $\omega', \omega'', \omega'''$ rispetto ad U formano un gruppo di tre sistemi coniugati armonici tra loro. La forma simbolica di questo covariante sarà

$$\begin{vmatrix} A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \\ A''', & B''', & C''' \end{vmatrix}^m (A'x'+B'y'+C'z')_{n-m}^{n-m} (A''x''+B''y''+C''z'')_{n-m}^{n-m} (A'''x'''+B'''y'''+C'''z''')_{n-m}^{n-m},$$

identificando dopo lo sviluppo le quantità $A'_\alpha B'_\beta C'_\gamma$, $A''_\alpha B''_\beta C''_\gamma$, $A'''_\alpha B'''_\beta C'''_\gamma$,

corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di n, col coefficiente $A_\alpha B_\beta C_\gamma$ di U. Se $\varpi', \varpi'', \varpi'''$ coincidono con ϖ, ed m è pari, si avranno gli armonizzanti puri degli emananti di U.

Siano U, u due forme ternarie di grado pari n, armonizzanti l'una dell'altra; se di due elementi ϖ ed Ω si prendono gli emananti di uno stesso ordine m rispetto ad U ed u, l'invariante armonizzante di questi due emananti sarà un concomitante misto di U, di 3° grado nei coefficienti di U, e del grado $(n-m)$ nelle variabili (x, y, z) ed (X, Y, Z); esso stabilisce una dipendenza tra gli elementi ϖ ed Ω, tale che per ciascuna coppia (ϖ, Ω) che la verifica, i sistemi armonici d'ordine m di ϖ ed Ω rispetto ad U ed u sono coniugati armonici tra loro. Dando ad m i valori $1, 2 \ldots n-1$, si avrà così (per n pari) un'altra scala di concomitanti misti di U (gli *armonizzanti misti degli emananti del sistema* (U, u)), tutti di 3° grado nei coefficienti di U, e dei gradi $n-1$, $n-2 \ldots 1$ nelle variabili (x, y, z) ed (X, Y, Z). Per l'ultimo di questi concomitanti, essendo (ϖ, Ω) una coppia di elementi che lo annullano, gli elementi armonici di 1° ordine di ϖ ed Ω rispetto ad U ed u appartengono l'uno all'altro. La forma simbolica di questi concomitanti misti sarà

$$(Aa + Bb + Cc)_m^m (Ax + By + Cz)_{n-m}^{n-m} (aX + bY + cZ)_{n-m}^{n-m}$$

essendo (A, B, C) ed (a, b, c) le ombre che entrano nella formazione di U e di u.

Consideriamo l'emanante misto di U, $\Theta(n-m) U$ rispetto al gruppo G_{n-m} degli elementi $(\varpi_1, \varpi_2 \ldots \varpi_{n-m})$; supposto m pari, il contravariante armonizzante di questo emanante sarà un concomitante misto di U, di 2° grado nei coefficienti di U, di 2° grado tra le coordinate di ciascuno degli elementi del gruppo G_{n-m}, e del grado m tra le variabili (X, Y, Z); e l'invariante armonizzante dello stesso emanante sarà un covariante misto di U, di 3° grado nei coefficienti di U, e di 3° grado tra le medesime coordinate. Le espressioni simboliche di queste forme saranno rispettivamente

$$\begin{vmatrix} X, & Y, & Z \\ A', & B', & C' \\ A'', & B'', & C'' \end{vmatrix}^m \begin{matrix} (A'x_1 + B'y_1 + C'z_1)(A'x_2 + B'y_2 + C'z_2) \ldots (A'x_{n-m} + B'y_{n-m} + C'z_{n-m}) \\ (A''x_1 + B''y_1 + C''z_1)(A''x_2 + B''y_2 + C''z_2) \ldots (A''x_{n-m} + B''y_{n-m} + C''z_{n-m}) \end{matrix},$$

$$\begin{vmatrix} A', B', C' & (A'x_1+B'y_1+C'z_1)(A'x_2+B'y_2+C'z_2)..(A'x_{n-m}+B'y_{n-m}+C'z_{n-m}) \\ A'', B'', C'' & (A''x_1+B''y_1+C''z_1)(A''x_2+B''y_2+C''z_2)..(A''x_{n-m}+B''y_{n-m}+C''z_{n-m}) \\ A''', B''', C''' & (A'''x_1+B'''y_1+C'''z_1)(A'''x_2+B'''y_2+C'''z_2)..(A'''x_{n-m}+B'''y_{n-m}+C'''z_{n-m}) \end{vmatrix},$$

con la solita avvertenza d'identificare tra loro le ombre dopo lo sviluppo.

Indicando con Φ un covariante di U, del grado $\varkappa$ nei coefficienti di U, e del grado ν nelle variabili, si considerino gli emananti $(n-m)^{mo}$ e $(\nu-\mu)^{mo}$ di un elemento ϖ rispetto ad U ed a Φ; la risultante $R_{m\mu}$ di questi due emananti (loro contravariante combinante) sarà un concomitante misto di U, del grado $m\varkappa+\mu$ nei coefficienti di U, del grado $m(\nu-\mu)+\mu(n-m)$ tra le coordinate di ϖ, e del grado $m\mu$ tra quelle di Ω; per ogni coppia di elementi (ϖ, Ω) appartenente a questo concomitante, i gruppi G_m e G_μ determinati da Ω nei sistemi armonici d'ordine m e μ di ϖ rispetto ad U ed a Φ hanno un elemento di comune. Gli $n-1$ concomitanti R che così si ottengono dando ad m i diversi valori da 1 ad $n-1$, si diranno i *concomitanti associati di* Φ, *d'ordine* μ, *rispetto ad* U. Se Φ è la stessa forma U, il μ^{mo} di questi concomitanti, che corrisponde ad $m=\mu$, è chiaro che sarà nullo identicamente.

Siano ora Φ', Φ'' due covarianti di U, dei gradi $\varkappa', \varkappa''$ nei coefficienti di U, e dei gradi ν', ν'' nelle variabili; considerando gli emananti $(n-m)^{mo}$, $(\nu'-\mu')^{mo}$, e $(\nu''-\mu'')^{mo}$ di un elemento ϖ rispetto ad U, Φ' e Φ'', la loro risultante $R_{m\mu'\mu''}$ (loro invariante combinante) sarà un covariante di U del grado $m(\mu'\varkappa''+\varkappa'\mu'')+\mu'\mu''$ nei coefficienti di U, e del grado $m(\mu'\nu''+\nu'\mu'')+n\mu'\mu''-3m\mu'\mu''$ tra le coordinate di ϖ; per ogni elemento ϖ di questo covariante, i sistemi armonici d'ordine m, μ' e μ'' di ϖ rispetto ad U, Φ' e Φ'' avranno un elemento di comune. Dando ad m i diversi valori da 1 ad $n-1$, gli $n-1$ covarianti che così si ottengono si diranno i *covarianti associati del sistema* (Φ', Φ''), *d'ordine* (μ', μ'') *rispetto ad* U. Se Φ' o Φ'' coincide con U, il covariante associato corrispondente ad $m=\mu'$, o ad $m=\mu''$, sarà nullo identicamente; se poi Φ' e Φ'' coincidono entrambi con U, sarà $R_{m\mu'\mu''}$ divisibile per U, ed il quoziente, del grado $m(\mu'+\mu'')+\mu'\mu''-1$ nei coefficienti di U, e del grado $n(m\mu'+m\mu''+\mu'\mu''-1)-3m\mu'\mu''$ nelle variabili darà per i diversi valori di m i covarianti associati d'ordine (μ', μ'') di U rispetto allo stesso U; se due tra i numeri m, μ', μ'' sono eguali tra loro, il covariate associato sarà nullo identicamente. Nell'ipotesi di n pari, una ricerca ana-

loga alla precedeote si potrà stabilire, considerando invece di U il suo contravariante armonizzante, e supponendo che Φ, Φ', Φ'' siano contravarianti di U.

Indicando con U_i ed U_j i valori della forma U di grado pari n, per le coordinate di x_i ed x_j, si ponga

$$F = UU_iU_j - \lambda \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_i, & y_i, & z_i \\ x_j, & y_j, & z_j \end{vmatrix}^n = 0,$$

il contravariante, o l'invariante, armonizzante della forma F, considerata come funzione di (x, y, z), eguagliato a zero darà un'equazione di 2°, o di 3° grado in λ, in cui i moltiplicatori delle diverse potenze di λ saranno conecomitanti misti, o covarianti misti di U. Se poi si eliminano le variabili (x, y, z), (x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j) tra le nove equazioni

$$\frac{dF}{dx}=0, \frac{dF}{dy}=0, \frac{dF}{dz}=0; \frac{dF}{dx_i}=0, \frac{dF}{dy_i}=0, \frac{dF}{dz_i}=0; \frac{dF}{dx_j}=0, \frac{dF}{dy_j}=0, \frac{dF}{dz_j}=0,$$

il che corrisponde a cercare la terna di elementi (x, x_i, x_j) che rende λ uo massimo o un minimo, l'equazione finale in λ, che dà questi valori massimi o mimini, avrà per moltiplicatori delle diverse potenze di λ altrettanti invariaoti di U.

Le stesse consideraziooi valgono ponendo per una funzione U di grado $3n$, ed n pari, la relazioone

$$F = \Theta^n \Theta_i^n \Theta_j^n U - \lambda \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_i, & y_i, & z_i \\ x_j, & y_j, & z_j \end{vmatrix}^n = 0.$$

7. Forme sizigetiche ed involuzioni. Siano $U_1, U_2, \dots U_i \dots U_r$ più forme ternarie di grado n; ogni forma U determinata dall'equazione

$$(1) \qquad U = k_1U_1 + k_2U_2 \dots + k_iU_i \dots + k_rU_r$$

variando i rapporti tra i coefficienti k_i si dirà *forma sizigetica* col sistema $(U_1, U_2 \dots U_i \dots U_r)$; le forme U costituiscono una *serie lineare* $(r-1)^{pla}$, e si diranno tra loro in *involuzione* $(r-1)^{pla}$ *di grado* n. È chiaro che le

forme proposte U_i appartengono all'involuzione; inoltre, prendendo convenientemente i valori dei coefficienti k_i, si può supporre che nell'equazione (1) le r forme U_i invece di essere le forme primitive che determinano la data involuzione, siano r forme qualunque appartenenti alla stessa involuzione.

Nell'equazione (1) entrano $r-1$ rapporti arbitrarii tra i coefficienti k_i, quindi ogni forma di un'involuzione $(r-1)^{pla}$ può essere assoggettata ad $r-1$ condizioni, o dati $r-1$ elementi di quella forma essa è del tutto determinata: osservando che $\frac{n(n+3)}{2}$ è il numero dei coefficienti arbitrarii di una forma ternaria di grado n, se $\frac{n(n+3)}{2} \overline{\leqq} r-1$, le forme dell'involuzione saranno del tutto arbitrarie, quindi basterà considerare le involuzioni da $r-1=1$, cioè dalla *semplice*, sino ad $r-1=\frac{n(n+3)}{2}-1$, o sia sino alla $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)^{pla}$.

Se la forma U_i ha un elemento m^{plo} x, si avrà indipendentemente da x_i, $\Theta_i^{m-1} U_i = 0$, quindi essendo

$$\Theta_i^{m-1} U = \Theta_i^{m-1} U_1 + \Theta_i^{m-1} U_2 \ldots + \Theta_i^{m-1} U_i \ldots + \Theta_i^{m-1} U_r , \tag{2}$$

se l'elemento x è m^{plo} per tutte le forme U_i, sarà anche m^{plo} per la forma U; adunque *se* r *forme di un'involuzione* $(r-1)^{pla}$ *hanno un elemento comune, di un ordine qualunque di multiplicità, esso apparterrà con lo stesso ordine di multiplicità a tutte le altre forme dell'involuzione.*

S'intendano le forme U_i distribuite in gruppi di r_1, $r_2 \ldots r_\rho$ forme, sicchè si abbia la relazione $r_1 + r_2 \ldots + r_\rho = r$, ed indichiamo con U'_i, $U''_i \ldots U^{\rho}_i$ rispettivamente una qualunque delle r_1, $r_2 \ldots r_\rho$ forme appartenenti a tali gruppi; allora se $U', U'' \ldots U^{\rho}$ sono in involuzione $(r_1-1)^{pla}$, $(r_2-1)^{pla} \ldots (r_\rho-1)^{pla}$ con le forme $U'_i, U''_i \ldots U^{\rho}_i$, ogni forma in involuzione $(\rho-1)^{pla}$ con $(U', U'' \ldots U^{\rho})$ sarà in involuzione $(r-1)^{pla}$ con $(U_1, U_2 \ldots U_r)$.

Ponendo generalmente

$$U_i = (A_i x + B_i y + C_i z)_n^n = \Sigma \frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} A_{i\alpha} B_{i\beta} C_{i\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma ,$$

se $U, U_1, U_2 \ldots U_r$ sono forme appartenenti ad un'involuzione $(r-1)^{pla}$ sarà

$$\left| \begin{array}{c} \ldots\ldots A_\alpha \; B_\beta \; C_\gamma \ldots\ldots \\ \ldots\ldots A_{1\alpha} \, B_{1\beta} \, C_{1\gamma} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots A_{2\alpha} \, B_{2\beta} \, C_{2\gamma} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots A_{r\alpha} \, B_{r\beta} \, C_{r\gamma} \ldots\ldots \end{array} \right\| = 0 , \tag{3}$$

vale a dire saranno nulli tutti i determinanti d'ordine $r+1$ che si possono trarre dalla suddetta matrice, la quale è formata da $r+1$ linee orizzontali e $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ linee verticali, gli elementi di queste diverse linee verticali essendo i coefficienti delle forme $U, U_1, U_2 \ldots U_r$ corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di n.

Sia

$$u=(aX+bY+cZ)_a^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}a_\alpha b_\beta c_\gamma X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

una forma coniugata armonica con ciascuna delle r forme U_i; sarà

$$(A_ia+B_ib+C_ic)_a^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}A_{i\alpha}B_{i\beta}C_{i\gamma}\,.\,a_\alpha b_\beta c_\gamma=0\,,$$

quindi se in questa equazione si pone successivamente $i=1, 2\ldots r$, i risultati si sommano, dopo di averli moltiplicati rispettivamente per k_1, $k_2\ldots k_r$, e si osserva che per l'equazione (1) si ha

$$A_\alpha B_\beta C_\gamma=k_1A_{1\alpha}B_{1\beta}C_{1\gamma}+k_2A_{2\alpha}B_{2\beta}C_{2\gamma}\ldots+k_rA_{r\alpha}B_{r\beta}C_{r\gamma}\,,$$

verrà

$$(4)\qquad (Aa+Bb+Cc)_a^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}A_\alpha B_\beta C_\gamma\,.\,a_\alpha b_\beta c_\gamma=0\,,$$

vale a dire u sarà coniugata armonica con U; adunque *se una forma (contragrediente) è coniugata armonica con* r *forme (cogredienti) appartenenti ad un'involuzione* $(r-1)^{pla}$, *essa sarà coniugata armonica con tutte le altre forme appartenenti alla stessa involuzione.*

Supponiamo che la forma u sia il contravariante armonizzante della coppia di forme cogredienti (U', U''); se u è coniugata armonica con U_i, sarà (U_i, U', U'') una terna di forme coniugate armoniche tra loro; adunque *se una coppia di forme cogredienti costituisce con* r *forme cogredienti appartenenti ad un'involuzione* $(r-1)^{pla}$ *terne di forme coniugate armoniche tra loro, essa costituirà ancora una terna di forme coniugate armoniche tra loro con ogni altra forma appartenente alla stessa involuzione.*

Siccome ogni forma di grado n appartenente ad un'involuzione $(r-1)^{pla}$ contiene $r-1$ parametri arbitrarii k, e la condizione affinchè una forma cogrediente U di grado n sia coniugata armonica con un'altra forma contragrediente u dello stesso grado conduce ad una relazione lineare tra i coefficienti di U, si avrà che *l'involuzione* $(r-1)^{pla}$ *di grado* n *è costituita da tutte le forme cogredienti di grado* n, *che sono coniugate armo-*

niche con $\frac{n(n+3)}{2}-r+1$ *forme contragredienti arbitrarie*. In altri termini *l'involuzione* $(r-1)^{pla}$ *di grado* n *è costituita da tutte le forme cogredienti di grado* n, *che con* $\frac{n(n+3)}{2}-r+1$ *coppie arbitrarie di forme cogredienti determinano terne di forme coniugate armoniche tra loro.*

Segue da ciò che tra le forme cogredienti in involuzione $(r-1)^{pla}$ quelle che sono coniugate armoniche con s forme contragredienti arbitrarie, o pure che determinano con s coppie di forme cogredienti arbitrarie, terne di forme coniugate armoniche tra loro, apparterranno ad un'involuzione $(r-s-1)^{pla}$.

Se $u_1, u_2 \ldots u_{\frac{n(n+3)}{2}-r+1}$ sono forme coniugate armoniche con $U_1, U_2 \ldots U_r$, tutte le forme U dell'involuzione $(r-1)^{pla}$ determinata da $(U_1, U_2 \ldots U_r)$, saranno coniugate armoniche con $(u_1, u_2 \ldots u_{\frac{n(n+3)}{2}-r+1})$, come viceversa tutte le forme u dell'involuzione $\left(\frac{n(n+3)}{2}-r\right)^{pla}$ determinata da $(u_1, u_2 \ldots u_{\frac{n(n+3)}{2}-r+1})$ saranno coniugate armoniche con $(U_1, U_2 \ldots U_r)$; le forme u ed U si diranno tra loro *associate*, adunque *tutte le forme di grado* n *in involuzione* $(r-1)^{pla}$ *sono coniugate armoniche con un sistema di* $\frac{n(n+3)}{2}-r+1$ *forme associate.*

Nel caso speciale di $r=\frac{n(n+3)}{2}$, tutte le forme U dell'involuzione proposta $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)^{pla}$ e di grado n saranno coniugate armoniche rispetto ad una forma u di grado n; indicando con $\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} a_\alpha b_\beta c_\gamma$ il determinante tratto dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \cdots\cdots A_{1\alpha} B_{1\beta} C_{1\gamma} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots A_{2\alpha} B_{2\beta} C_{2\gamma} \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots A_{\frac{n(n+3)}{2}\alpha} B_{\frac{n(n+3)}{2}\beta} C_{\frac{n(n+3)}{2}\gamma} \cdots\cdots \end{matrix} \right\|$$

col togliere la linea verticale corrispondente alla partizione (α, β, γ) di n, sarà

$$(5) \qquad u=(aX+bY+cZ)_n^n=\Sigma \frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)} a_\alpha b_\beta c_\gamma X^\alpha Y^\beta Z^\gamma .$$

Prendendo l' s^{me} emanante di U rispetto ad un elemento x_i, l'equazione (1) darà

$$\Theta_i^s U = k_1 \Theta_i^s U_1 + k_2 \Theta_i^s U_2 \ldots + k_i \Theta_i^s U_i \ldots + k_r \Theta_i^s U_r ,$$

la forma $\Theta'_j U$ sarà dunque sizigetica con le r forme $\Theta'_j U_i$, e quindi variando i rapporti tra i coefficienti k_j le forme $\Theta'_j U$ saranno in involuzione $(r-1)^{pla}$; chiamando *equionarmoniche* due involuzioni $(r-1)^{pla}$ (dello stesso o di diverso grado) quando ad ogni forma della prima involuzione, o di un'involuzione di multiplicità *minore contenuta* in essa, corrisponde una forma della seconda involuzione, o di un'involuzione di multiplicità minore contenuta in essa (in altri termini quando i coefficienti k nelle forme della prima involuzione sono espressioni lineari dei coefficienti k nelle formo della seconda involuzione, o in particolare sono ad essi eguali) si avrà la proprietà; *se di un elemento si prendono rispetto alle forme di un'involuzione* $(r-1)^{pla}$ *le forme emanonti dei diversi ordini, queste forme costituiranno involuzioni* $(r-1)^{pla}$ *equionarmoniche.*

Se l'elemento x è m^{plo} per la forma U, esso dovrà verificare le $\frac{m(m+1)}{2}$ equazioni $D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U=0$ corrispondenti alle diverse partizioni (α, β, γ) di $m-1$, quindi tra le forme di un'involuzione $(r-1)^{pla}$ ve ne saranno di quelle dotate di elementi multipli d'ordine m, purchè sia

$$r+1 \lesseqgtr \frac{m(m+1)}{2};$$

questi elementi multipli si diranno gli elementi m^{pli} dell'involuzione. Se $r+1=\frac{m(m+1)}{2}$ il numero degli elementi m^{pli} sarà determinato; i valori dei rapporti tra i coefficienti k_i corrispondenti alle forme dell'involuzione dotate di elementi m^{pli} saranno determinati da r tra le $r+1=\frac{m(m+1)}{2}$ equazioni che, supposto $\alpha+\beta+\gamma=m-1$, sono racchiuse nel tipo

$$k_1 D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_1 \dots + k_i D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_i \dots + k_r D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_r = 0\,, \tag{6}$$

dopo di aver posto in esse le coordinate di uno degli elementi x che annullano i determinanti tratti dalla matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dots\dots & D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_1 & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_i & \dots\dots \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots & D_x^\alpha D_y^\beta D_z^\gamma U_r & \dots\dots \end{matrix} \right\|$$

di r linee orizzontali ed $r+1$ linee verticali. Questi determinanti, di nu-

mero $\frac{m(m+1)}{2}$, sono forme del grado $\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)(n-m+1)$ in (x,y,z), le quali (per la teoria dell'climinazione) *) hanno tutte in comune gli $\frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)\right](n-m+1)^2$ elementi m^{pli} dell'involuzione proposta $\left(\frac{m(m+1)}{2}-2\right)^{pla}$ di grado n.

Se $r=\frac{m(m+1)}{2}$, le equazioni (6) sono di numero r, e la matrice precedente dà un solo determinante del grado $\frac{m(m+1)}{2}(n-m+1)$ in (x,y,z); adunque *un'involuzione* $\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)^{pla}$ *di grado* n *ha infiniti elementi* m^{pli} *appartenenti ad una forma del grado* $\frac{m(m+1)}{2}(n-m+1)$.

Se $r>\frac{m(m+1)}{2}$ gli elementi m^{pli} dell'involuzione sono indeterminati; allora considerando tra le forme (cogredienti) dell'involuzione quelle che sono coniugate armoniche con $r-\frac{m(m+1)}{2}+1$, o pure $r-\frac{m(m+1)}{2}$ forme contragredienti arbitrarie (o in particolare quelle che contengono altrettanti elementi ∞ arbitrarii) siccome esse costituiscono un'involuzione $\left(\frac{m(m+1)}{2}-2\right)^{pla}$, o pure $\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)^{pla}$ di grado n, nel primo caso si avranno $\frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)}{2}\left(\frac{m(m+1)}{2}-1\right)\right](n-m+1)^2$ elementi m^{pli}, e nel secondo infiniti elementi m^{pli} appartenenti ad una forma del grado $\frac{m(m+1)}{2}(n-m+1)$.

Se ad uno stesso sistema ternario appartengono $m_1, m_2 \dots m_\mu$ involuzioni di grado n, rispettivamente $(r_1-1)^{ple}, (r_2-1)^{ple} \dots (r_\mu-1)^{ple}$, considerando i sistemi di forme associate a quelle che determinano le date involuzioni, si vedrà che le forme (cogredienti) comuni alle medesime involuzioni saranno coniugate armoniche rispetto ad

$$m_1\left(\frac{n(n+3)}{2}-r_1+1\right)+m_2\left(\frac{n(n+3)}{2}-r_2+1\right)\dots+m_\mu\left(\frac{n(n+3)}{2}-r_\mu+1\right)=s$$

forme contragredienti di grado n, e quindi supposto $s<\frac{n(n+3)}{2}$, costituiranno un'involuzione $(n-s)^{pla}$ di grado n. Allocchè $s=\frac{n(n+3)}{2}$ vi sarà una sola forma comune alle date involuzioni; così, per esempio, se ad

*) Salmon, *Lessons on higher Algebra*, pag. 217.

uno stesso sistema ternario appartengono $\frac{n(n+3)}{2}$ involuzioni $\left(\frac{n(n+3)}{2}-1\right)^{pla}$ di grado n, indicando con

$$u_s=(a_s X+b_s Y+c_s Z)_n^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}a_{s\alpha}b_{s\beta}c_{s\gamma}\,.\,X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

la forma contragrediente con la quale sono coniugate armoniche tutte le forme di una qualunque di queste involuzioni, e con $\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}A_\alpha B_\beta C_\gamma$ il determinante tratto dalla matrice

$$\left\|\begin{array}{c} \cdots\cdots a_{1\alpha}b_{1\beta}c_{1\gamma}\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots a_{2\alpha}b_{2\beta}c_{2\gamma}\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots a_{\frac{n(n+3)}{2}\alpha}b_{\frac{n(n+3)}{2}\beta}c_{\frac{n(n+3)}{2}\gamma}\cdots \end{array}\right\|$$

col togliere la linea verticale corrispondente alla partizione (α, β, γ) di n, la forma comune alle proposte involuzioni sarà

$$U=(Ax+By+Cz)_n^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}A_\alpha B_\beta C_\gamma\,.\,x^\alpha y^\beta z^\gamma\,.$$

Allorchè $s>\frac{n(n+3)}{2}$ le involuzioni proposte non ammettono in generale forme comuni; le condizioni perchè ciò possa aver luogo si ottengono eguagliando a zero i determinanti tratti dalla matrice

$$\left\|\begin{array}{c} \cdots\cdots a_{1\alpha}b_{1\beta}c_{1\gamma}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots a_{2\alpha}b_{2\beta}c_{2\gamma}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots a_{s\alpha}b_{s\beta}c_{s\gamma}\cdots\cdots \end{array}\right\|$$

supponendo che

$$u_i=(a_i X+b_i Y+c_i Z)_n^n=\Sigma\frac{(n)}{(\alpha)(\beta)(\gamma)}a_{i\alpha}b_{i\beta}c_{i\gamma}\,.\,X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$$

rappresenti una qualunque delle forme associate a quelle che determinano le proposte involuzioni.